

Ein formales System der einfachen Typenlogik
mit Extensionalität und Elimination
der Schnittregel

Karl Schlögl

1972

1971

**Ein formales System der einfachen Typenlogik
mit Extensionalität und Elimination
der Schnittregel**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
an der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Karl Schlögl

München, im August 1971

Berichterstatter:

Professor Dr. K. Schütte

Professor Dr. J. Diller

Mündliche Prüfung am 18. Februar 1972



Übersicht:

Einleitung	1
§ 1. Die Terme	5
§ 2. Die Ordnung eines Terms	7
§ 3. Der Rang eines Terms	11
§ 4. Axiome und Grundsatzregeln	12
§ 5. Herleitbarkeitseigenschaften	15
§ 6. Deduktionsfäden	22
§ 7. Deduktionsfäden und strenge Herleitbarkeit	26
§ 8. Semiwertungen	27
§ 9. Semiwertungen und strenge Herleitbarkeit	29
§ 10. Eine semantische Gleichheitseigenschaft	29
§ 11. V-Komplexe	38
§ 12. V-Korrespondenzen	40
§ 13. V-Korrespondenzen und die zugrundeliegende Semiwertung	42
§ 14. Weitere Eigenschaften der V-Korrespondenzen	47
§ 15. V-Korrespondenzen und Herleitbarkeit	50
§ 16. Die Elimination der Schnittregel	53
Literatur	

Einleitung

Takeuti [9] entwickelte 1953 ein formales System der einfachen Typenlogik, den Sequenzenkalkül GLC. Aus seiner Fundamentalvermutung für GLC, daß jede herleitbare Formel ohne Benutzung der Schnittregel hergeleitet werden kann, bewies er die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis.

Schütte [5] formulierte 1960 ein ähnliches formales System der einfachen Typenlogik und gab ein semantisches Äquivalent zu Takeutis Fundamentalvermutung, das auf partiellen Wertungen beruht. Mit Hilfe dieses semantischen Äquivalents gelang es 1967/68 unabhängig voneinander Takahashi [7] und Prawitz [2], die Fundamentalvermutung auf nichtkonstruktivem Weg zu beweisen.

1968 entwickelte Schütte [4] ein formales System STE der einfachen Typenlogik mit Extensionalität, das sich in der Formulierung grundlegend von GLC unterscheidet, und gab eine Formel an, die in STE herleitbar ist, jedoch nicht ohne Benutzung der Schnittregel.

Andererseits gelang es 1968 Takahashi [8], das System GLC von Takeuti um eine Grundsclußregel für extensionale Gleichheit zu erweitern und auch in diesem erweiterten System die Schnittregel zu eliminieren. (Der Beweis stützt sich auf die Methoden von Schütte [5] und Takahashi [7]. Er wurde 1969 von Reiß [3] näher ausgeführt.) Angesichts dieses Ergebnisses war die Frage naheliegend, ob auch eine Modifikation des formalen Systems STE von Schütte [4] die wichtige Eigenschaft der Schnitteliminierbarkeit hat.

In den §§ 1 und 4 der vorliegenden Arbeit wird ein formales System der einfachen Typenlogik mit Extensionalität beschrieben, das dieselben Grundzeichen benutzt wie STE: Es hat zu jedem Typ ein Funktional E, das infolge geeigneter Grundsclußregeln die Erfordernisse einer extensionalen Gleichheit erfüllt. Anstelle der λ -Abstraktion werden Kombinatoren K und S mit Typen verwendet, und die Gleich-

heitsfunktionale gestatten die Definition von Quantoren wie bei Henkin [1], so daß weder gebundene Variablen als Grundzeichen noch spezielle Grundschrlußregeln zur Generalisierung benötigt werden.

Die Axiome und Grundschrlußregeln sind im Vergleich zu STE zum Teil wesentlich schwächer formuliert. (Der sehr allgemeinen Ersetzungsregel A4 des formalen Systems STE entsprechen hier die Grundschrlußregeln A4, Ea und Eb, die Gleichheitsregel B4 von STE ist durch die Regeln C1, C2 und D ersetzt.) Da sich die Herleitbarkeit infolgedessen übersichtlicher gestaltet, ist es möglich die Schnittregel zu eliminieren. Trotzdem sind die Grundschrlußregeln von STE in dem hier beschriebenen formalen System zulässig, beide Systeme leiten daher dieselbe Klasse von Formeln her.

In § 3 wird der Rang eines Terms definiert, der dem Hilfsbegriff "grade of a regular expression" von Schütte [5] entspricht. Der Nachweis für die Existenz dieses Begriffs wird mit Hilfe der in § 2 behandelten "Ordnung eines Terms" geführt; dabei handelt es sich um eine Modifikation des von Schütte [6] stammenden gleichnamigen Begriffs, dessen Grundidee auf einer Mitteilung von W. Howard beruht.

In § 5 werden wichtige Herleitbarkeitseigenschaften gezeigt: aussagenlogische Gesetze, Gleichheitseigenschaften sowie die übrigen Eigenschaften, die formale Systeme der einfachen Typenlogik haben müssen. Insbesondere werden λ -Abstraktion und Generalisierung definiert und dafür die üblichen Gesetze nachgewiesen.

Entsprechend zu Schütte [5] werden in § 6 invers zu den Grundschrlußregeln Deduktionsfäden definiert, und mit ihrer Hilfe wird in den §§ 7 bis 9 gezeigt: Ist eine Formel nicht schnittfrei herleitbar, so gibt es eine Semiwertung, in der sie falsch ist. Die Semiwertung schwächt den Begriff der totalen Wertung (das ist eine Zuordnung der Werte wahr und falsch zu jeder Formel, so daß die natürlichen logischen Gesetze erfüllt sind, wenn man die beabsichtigte Bedeutung der logischen Symbole beachtet) dahingehend ab, daß nicht notwendig jede Formel einen Wahrheitswert hat.

In Analogie zu Takahashi [7] werden zu einer gegebenen Semiwertung in § 11 V-Komplexe eingeführt. Um diesen Begriff zweckmäßig auf das hier betrachtete formale System zu übertragen, bedarf es eines gewissen Aufwandes. In § 10 sind Vorbereitungen zur Definition der Komplexe getroffen.

Unter Benutzung der Semiwertung wird auf den Termen eine "Semigleichheit" $\sim$ definiert, eine Relation, die reflexiv und symmetrisch, jedoch nicht notwendig transitiv ist. Die Semigleichheit zweier Formeln hat die Bedeutung, daß diese beiden Formeln "möglicherweise gleich" sind, weil die Semiwertung sie nicht als verschieden definiert (Die Formeln haben also bei der Semiwertung entweder denselben Wahrheitswert, oder mindestens einer von ihnen wird durch die Semiwertung kein Wahrheitswert zugeordnet.). Ist die zugrundeliegende Semiwertung sogar eine totale Wertung, so ist die Relation $\sim$ auch transitiv; $p \sim q$ hat in diesem Fall die Bedeutung, daß die totale Wertung der Formel $E p q$ den Wert wahr zuordnet.

Das Lemma 10.5 kann als das Herzstück des Beweises für die Schnitteliminierbarkeit angesehen werden. Es wird dort der Relation $\sim$ eine Gleichheitseigenschaft nachgewiesen, die das genaue semantische Analogon zu den syntaktischen Gleichheitseigenschaften der Funktionale E ist.

Auf dem modifizierten Begriff der V-Komplexe aufbauend, wird in den verbleibenden §§ 11 bis 16 der Beweis von Takahashi [7] auf das vorliegende formale System übertragen. Man hat eine Zuordnung ϕ_2 , die einerseits einer nicht schnittfrei herleitbaren Formel den Wert falsch, andererseits jeder herleitbaren Formel den Wert wahr zuordnet, womit die Eliminierbarkeit der Schnittregel bewiesen ist.

Herrn Professor Schütte möchte ich herzlich für seine Anregungen zu dieser Arbeit danken.

§ 1. Die Terme

1.1. Induktive Definition der Typen:

1.1.1. 0 und 1 sind Typen. (0 ist zu verstehen als die Klasse der Formeln, 1 als die Klasse der Grundobjekte.)

1.1.2. Sind δ und τ Typen, so ist auch $(\delta\tau)$ ein Typ. $((\delta\tau)$ ist zu verstehen als die Klasse der Abbildungen von dem Typ δ in den Typ τ .)

Mitteilungszeichen: ϱ, δ, τ für beliebige Typen
 γ nur für die Typen 0 und 1

Alle vereinbarten Mitteilungszeichen werden auch mit unteren Indizes verwendet.

Zur Abkürzung schreiben wir meistens $\tau_1 \dots \tau_n$ anstelle von $(\tau_1(\tau_2(\dots(\tau_{n-1}\tau_n)\dots)))$, wenn $n > 1$.

1.2. Bemerkung:

Jeder Typ hat die Gestalt $\tau_1 \dots \tau_n \gamma$ ($n \geq 0$).

1.3. Als Grundterme haben wir

- abzählbar viele Variablen von jedem Typ τ ,
- höchstens abzählbar viele Konstanten von jedem Typ τ ,
- den Junktor N vom Typ 00 (für die Negation),
- den Junktor A vom Typ 000 (für die Adjunktion),
- ein Gleichheitssymbol E_τ vom Typ $\tau\tau 0$ für jeden Typ τ ,
- einen Kombinator $K_{\delta\tau}$ vom Typ $\tau\delta\tau$ für alle Typen δ und τ ,
- einen Kombinator $S_{\varrho\delta\tau}$ vom Typ $(\varrho\delta\tau)(\varrho\delta)\varrho\tau$ für alle Typen ϱ, δ und τ .

1.4. Induktive Definition der Terme:

1.4.1. Jeder Grundterm vom Typ τ ist ein Term vom Typ τ .

1.4.2. Ist p ein Term vom Typ $\delta\tau$ und q ein Term vom Typ δ , so ist (pq) ein Term vom Typ τ .

1.5. Terme vom Typ 0 heißen Formeln.

Mitteilungszeichen:

x^τ, y^τ, z^τ für Variablen vom Typ τ (Wir machen keinen Unterschied zwischen Variablen und Konstanten.)

$p^\tau, q^\tau, r^\tau, s^\tau, t^\tau$ für Terme vom Typ τ

Zur Abkürzung schreiben wir gewöhnlich $p_1 \dots p_n$ anstelle von $((\dots((p_1 p_2) p_3) \dots) p_n)$, wenn $n > 1$.

Bei der Mitteilung von Termen wird der obere Index, der den Typ angibt, meist weggelassen, wenn er aus dem Zusammenhang hervorgeht oder erschlossen werden kann; insbesondere wenn das betreffende Mitteilungszeichen schon an einer anderen Stelle mit oberem Index vorkommt. Tritt also innerhalb desselben Sinnzusammenhangs ein Mitteilungszeichen p^τ für Terme einmal mit und ein anderes Mal ohne den oberen Typ auf, so ist unter p und p^τ derselbe Term zu verstehen.

Sind Mitteilungszeichen für Terme nach dem Vorbild $p_1 \dots p_n$ hintereinandergereiht, so soll die Zeichenreihe $p_1 \dots p_n$ als Ganzes ebenfalls einen Term mitteilen. Ist insbesondere p als Term vom Typ $\tau_1 \dots \tau_n$ bekannt, so ist in der Schreibweise $p_{\tau_1} \dots t_{\tau_n}$ jedes t_i mit dem Typ τ_i zu lesen.

Oft lassen wir auch die unteren Indizes der Symbole $E_\tau, K_{\delta\tau}$ und $S_{\delta\tau}$ fort, wenn diese Indizes erschlossen werden können.

1.6. Kombinationen vom Typ τ heißen Terme der Gestalt

- $K_{\delta\tau} p q$ (dessen Reduzierte p ist) oder
- $S_{\delta\tau} p q r$ (dessen Reduzierte $pr(qr)$ ist).

Mitteilungszeichen: k^τ für Kombinationen vom Typ τ
 $(k^\tau)^R$ für die Reduzierte von k^τ

1.7. Bemerkung:

Jeder Term vom Typ τ hat die Gestalt $p^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n$, ($n \geq 0$), wobei p ein Grundterm ist.

Insbesondere hat jede Formel die Gestalt x^0 , Np , Apq , Epq , $x^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n$ ($n > 0$) oder $k^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n$ ($n \geq 0$), und jeder Term vom Typ 1 hat die Gestalt x^1 , $x^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n$ ($n > 0$) oder $k^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n$ ($n \geq 0$).

Sind $x_1 \dots x_n$ paarweise verschiedene Variablen, und ist für $j=1 \dots n$ t_j ein Term von demselben Typ wie die Variable x_j , so bezeichne $p \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ t_1 \dots t_n \end{pmatrix}$ die Zeichenreihe, die man aus dem Term p erhält, indem man jedes in p vorkommende x_j durch das entsprechende t_j ersetzt.

1.8. Bemerkung:

Ist p ein Term vom Typ τ , so auch $p \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$.

§ 2. Die Ordnung eines Terms

2.1. Induktive Definition des Typengrads $g\tau$ für jeden Typ τ :

$$2.1.1. \quad g\gamma := 0$$

$$2.1.2. \quad g(\delta\tau) := \text{Max} (g\delta+1, g\tau)$$

$$2.2. \text{Bemerkung: } g(\tau_1 \dots \tau_n \tau) = \text{Max} (g\tau_1+1 \dots g\tau_n+1, g\tau).$$

2.3. Induktive Definition der Typenlänge $l\tau$ für jeden Typ τ :

$$2.3.1. \quad l\gamma := 1$$

$$2.3.2. \quad l(\delta\tau) := l\delta + l\tau$$

$$2.4. \text{Bemerkung: } l(\tau_1 \dots \tau_n \tau) = l\tau_1 + \dots + l\tau_n + l\tau.$$

Wir schreiben in diesem Paragraphen $E(n)$ anstelle von 2^n .

2.5. Induktive Definition der natürlichen Zahl $[p^\tau]_i$ für jeden Term p^τ und alle natürlichen Zahlen i :

$$2.5.1. \quad [x^\tau]_i := \begin{cases} 0 & : i > g\tau \\ l\tau & : i \leq g\tau \end{cases}$$

$$2.5.2. \quad [N]_i := \begin{cases} 0 & : i > 0 \\ 1 & : i = 0 \end{cases}$$

$$2.5.3. \quad [A]_i := \begin{cases} 0 & : i > 0 \\ 1 & : i = 0 \end{cases}$$

$$2.5.4. \quad [E_{\tau}]_i := \begin{cases} 0 & : i > g\tau + 1 \\ 1 & : i \leq g\tau + 1 \end{cases}$$

$$2.5.5. \quad [K_{\tau}]_i := \begin{cases} 0 & : i > 0 \\ 1 & : i = 0 \end{cases}$$

$$2.5.6. \quad [S_{\tau}]_i := \begin{cases} 0 & : i > \max(g\tau + 2, g\tau + 2, g\tau + 1) \\ 1 & : i \leq \max(g\tau + 2, g\tau + 2, g\tau + 1) \end{cases}$$

$$2.5.7. \quad [p^{\tau} q^{\tau}]_i := \begin{cases} [p^{\tau}]_i & : i > g\tau \\ E([p^{\tau} q^{\tau}]_{i+1}) ([p^{\tau}]_i + [q^{\tau}]_i) & : i \leq g\tau \end{cases}$$

2.6. $[p^{\tau}]_0$ heiße die Ordnung des Terms p^{τ} .

2.7. Ist p ein Term vom Typ τ , so bezeichne $\bar{p}$

- p selbst, wenn τ 0 oder 1 ist,

- $p x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n}$, wenn τ die Gestalt $\tau_1 \dots \tau_n \gamma$ ($n > 0$) hat.

(Welche Variablen $x_1 \dots x_n$ man in dieser Definition auszeichnet, ist beliebig, da $[q]_i$ sich nicht ändert, wenn man in dem Term q Variablen umbenennt.)

2.8. Lemma:

Ist t ein Term vom Typ τ , und ist $[t]_i \geq 1$ für $i \leq g(\tau)$, so gilt $[tp]_0 > [\bar{p}]_0$ für jeden Term p vom Typ τ .

Beweis: Ist τ 0 oder 1, so ist $\bar{p} = p$, und man hat:

$$[tp]_0 = E([tp]_1) ([t]_0 + [p]_0) \geq [t]_0 + [p]_0 \geq [p]_0 + 1 > [p]_0.$$

Ist $\tau = \tau_1 \dots \tau_n \gamma$ ($n > 0$), so schreiben wir a_i statt

$$[tp]_i \text{ sowie } b_{ji} \text{ statt } [p^{\tau_1 \dots \tau_n \gamma} x_1^{\tau_1} \dots x_j^{\tau_j}]_i \quad (j = 1 \dots n).$$

a) Nach Definition gilt dann:

$$a_i = [t]_i \text{ für } i > g\tau, \quad a_i = E(a_{i+1}) ([t]_i + [p]_i) \text{ für } i \leq g\tau.$$

$$b_{1i} = [p]_i \text{ für } i > g\tau_1, \quad b_{1i} = E(b_{1,i+1}) ([p]_i + [x_1]_i) \text{ für } i \leq g\tau_1$$

Für $j+1 = 2 \dots n$ gilt $b_{j+1,i} = b_{ji}$ für $i > g\tau_{j+1}$ sowie

$$b_{j+1,i} = E(b_{j+1,i+1}) (b_{ji} + [x_{j+1}]_i) \text{ für } i \leq g\tau_{j+1}.$$

Unter Beachtung der Voraussetzung folgt daraus trivial:

- b) $a_i \geq 1\tau$ für $i=g\tau+1$, $a_i \geq E(a_{i+1})([p]_i + 1\tau)$ für $i \leq g\tau$.
 $b_{1i} = [p]_i$ für $i=g\tau$, $b_{1i} \leq E(b_{1.i+1})([p]_i + 1\tau_1)$ für $i < g\tau$.
 Für $j+1=2\dots n$ gilt $b_{j+1.i} = b_{ji}$ für $i=g\tau$ sowie
 $b_{j+1.i} \leq E(b_{j+1.i+1})(b_{ji} + 1\tau_{j+1})$ für $i < g\tau$.

c) Vorbemerkung: Für $j=1\dots n$ und alle $i < g\tau$ gilt:

$$b_{ji} \leq E(b_{1.i+1} + \dots + b_{j.i+1})([p]_i + (1\tau_1 + \dots + 1\tau_j)).$$

Der Beweis geschieht durch Induktion nach j . Fall $j=1$ steht in b). Wir führen den Schluß von j auf $j+1$:

$$\begin{aligned} b_{j+1.i} &\leq E(b_{j+1.i+1})(b_{ji} + 1\tau_{j+1}) \quad (\text{wegen b}) \\ &\leq E(b_{j+1.i+1})(E(\sum_{k=1}^j b_{k.i+1})([p]_i + \sum_1^j 1\tau_k) + 1\tau_{j+1}) \\ &(\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &\leq E(b_{j+1.i+1} + \sum_1^j b_{k.i+1})([p]_i + \sum_1^j 1\tau_k + 1\tau_{j+1}) \end{aligned}$$

d) Hilfsbehauptung:

Setzen wir $c_{i+1} := b_{1.i+1} + \dots + b_{n.i+1}$ sowie d für $1\tau_1 + \dots + 1\tau_n$, so gilt für $j=1\dots n$ und alle $i < g\tau$:

$$b_{ji} \leq E(c_{i+1})([p]_i + d).$$

(Das folgt unmittelbar aus c.)

e) Hilfsbehauptung:

$$\text{Für } j=1\dots n \text{ und } i=g\tau \text{ gilt: } b_{ji} = [p]_i.$$

(Das folgt durch triviale Induktion nach j .)

f) Behauptung:

$$\text{Für } i \leq g\tau \text{ gilt: } b_{1i} + \dots + b_{ni} + n < a_i.$$

Der Beweis wird durch Induktion nach $g\tau-i$ geführt:

Für $i = g\tau$ haben wir:

$$\begin{aligned} a_i &\geq E(a_{i+1})([p]_i + 1\tau) \geq E(1\tau)([p]_i + 1\tau) > E(n)([p]_i + n) \geq \\ &\geq E(n)[p]_i + n \geq n[p]_i + n = b_{1i} + \dots + b_{ni} + n \quad \text{wegen e)} \end{aligned}$$

Für $i < g\tau$ ist nach Induktionsvoraussetzung $c_{i+1} + n < a_{i+1}$.

Wir führen den Schluß von $i+1$ auf i unter Benutzung der Hilfsbehauptung d:

$$\begin{aligned} b_{i1} + \dots + b_{n1} + n &\leq n \cdot E(c_{i+1}) \cdot ([p]_i + d) + n = \\ &= n \cdot (E(c_{i+1}) \cdot ([p]_i + d) + 1) \leq n \cdot E(c_{i+1}) \cdot ([p]_i + d + 1) \leq \\ &\leq E(c_{i+1} + n) \cdot ([p]_i + d + 1) < E(a_{i+1}) \cdot ([p]_i + d + 1) = \\ &= E(a_{i+1}) \cdot ([p]_i + 1\tau) \leq a_i \end{aligned}$$

Aus f folgt sofort $b_{n0} < a_0$, das ist die Behauptung des Lemmas: $[px_1 \dots x_n]_0 < [tp]_0$.

2.9. $p^{\tau} > q^{\tau}$ bedeute: $[p]_0 > [q]_0$ und $[p]_i \geq [q]_i$ für $i \leq g\tau$.

2.10. Bemerkung:

$$[p^{6\tau} q^6]_i \geq [p^{6\tau}]_i \text{ für alle } i, [p^{6\tau} q^6]_i \geq [q^6]_i \text{ für } i \leq g6.$$

2.11. Lemma: $K_{6\tau} pq > p$.

2.12. Lemma: $S_{6\tau} pqr > pr(qr)$.

2.13. Lemma: Gilt $p^{6\tau} > q^{6\tau}$, so gilt auch $pr^6 > qr^6$.

Der Beweis dieser drei Aussagen kann wörtlich übernommen werden aus [6], dortige Lemmas 2.3, 2.4 und 2.7.

2.14. Erstes Hauptlemma:

$$\text{Für } j = 1 \dots n \ (n > 0) \text{ gilt } [x^{\tau_1 \dots \tau_n} p_1 \dots p_n]_0 > [\bar{p}_j]_0.$$

Zum Beweis schreiben wir bei gegebenem $j \ 6 := \tau_{j+1} \dots \tau_n$ sowie $t^{j6} := xp_1 \dots p_{j-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} [t]_i &= [xp_1 \dots p_{j-1}]_i \geq [x]_i \text{ für alle } i \text{ (wegen 2.10)} \\ &= 1(\tau_1 \dots \tau_n) \text{ für } i \leq g(\tau_1 \dots \tau_n) \\ &= 1\tau_1 + \dots + 1\tau_n + 1 \text{ für } i \leq \text{Max}(g\tau_{j+1} \dots g\tau_{j-1} + 1, g(\tau_j 6)) \\ &> 1\tau_j \text{ für } i \leq g(\tau_j 6). \text{ Somit haben wir:} \end{aligned}$$

$$[xp_1 \dots p_n]_0 = [tp_j p_{j+1} \dots p_n]_0 \geq [tp_j]_0 \text{ (2.10)} > [\bar{p}_j]_0 \text{ (2.8).}$$

2.15. Zweites Hauptlemma: $[Np]_0 > [p]_0$.

2.16. Drittes Hauptlemma: $[Apq]_0 > [p]_0$, $[Apq]_0 > [q]_0$.

Diese beiden Lemmata folgen trivial aus der Definition.

2.17. Viertes Hauptlemma: $[E_{\tau}pq]_0 > [\bar{p}]_0$, $[E_{\tau}pq]_0 > [\bar{q}]_0$.

Da $[E_{\tau}]_i = 1\tau$ für $i \leq g\tau+1=g(\tau\tau 0)$, gilt $[Epq]_0 \geq [Ep]_0 > [\bar{p}]_0$ wegen 2.10 und 2.8. Da $[E_{\tau}p]_i \geq [E_{\tau}]_i = 1\tau$ für $i \leq g\tau+1=g(\tau 0)$, gilt wegen 2.8 $[Epq]_0 > [\bar{q}]_0$.

2.18. Fünftes Hauptlemma:

$$\left[k^{\tau_1 \dots \tau_n} p_1 \dots p_n \right]_0 > \left[(k^{\tau_1 \dots \tau_n})^R p_1 \dots p_n \right]_0 \quad (n \geq 0).$$

Nach 2.11 bzw. 2.12 gilt $k > k^R$. Daraus folgt mit 2.13 $k p_1 \dots p_n > k^R p_1 \dots p_n$, daraus hat man die Behauptung.

§ 3. Der Rang eines Terms

3.1. Für einen Term p vom Typ τ sei l_p

- 0, wenn τ 0 oder 1 ist,
- n , wenn τ die Gestalt $\tau_1 \dots \tau_n$ ($n > 0$) hat.

3.2. Ist p ein Term vom Typ τ , so bezeichne $\bar{p}$ (wie in 2.7)

- p selbst, wenn τ 0 oder 1 ist,
- $p^{\tau_1} y_1 \dots y_n$, wenn τ die Gestalt $\tau_1 \dots \tau_n$ ($n > 0$) hat. Die

Wahl der Variablen $y_1 \dots y_n$ kann dabei nach Belieben geschehen. Denn da weder die Ordnung eines Terms q noch l_q sich ändern, wenn man in q Variablen umbenennt, hat auch der im folgenden definierte Rang diese Eigenschaft.

3.3. Definition des Grades G_p für jeden Term p vom Typ 0 oder 1 durch Induktion nach der Ordnung von p :

(Hier werden die 5 Hauptlemmata des § 2 verwendet.)

- $Gx^{\tau} := 0.$
- $G(x^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n) := \text{Max}(G\bar{t}_1 + Lt_1 \dots G\bar{t}_n + Lt_n) + 1 \quad (n > 0).$
- $G(Np) := Gp + 1.$
- $G(Apq) := \text{Max}(Gp, Gq) + 1.$
- $G(E_{\tau}pq) := \text{Max}(G\bar{p} + Lp, G\bar{q} + Lq) + 1.$
- $G(k^{\tau_1 \dots \tau_n} t_1 \dots t_n) := G((k^{\tau_1 \dots \tau_n})^{R_{t_1 \dots t_n}}) + 1 \quad (n \geq 0).$

3.4. Definition des Ranges R_p für jeden Term p :

$R_p := G\bar{p} + Lp.$ (Der Grad eines Terms p vom Typ 0 oder 1 stimmt demnach mit dem Rang von p überein.)

3.5. Nach Definition des Ranges und des Grades gilt:

- $G(xt_1 \dots t_n) > G\bar{t}_j$ sowie $G(xt_1 \dots t_n) > Rt_j$ für $j = 1 \dots n \quad (n > 0).$
- $G(Np) > Gp.$
- $G(Apq) > Gp$ und $Gq.$
- $G(E_{\tau}pq) > G\bar{p}$ und $G\bar{q}$, sowie $G(E_{\tau}pq) > Rp$ und $Rq.$
- $G(kt_1 \dots t_n) > G(k^R t_1 \dots t_n) \quad (n \geq 0).$

Ferner gilt $G(E_{\tau}pq) > G(E_{\tau}(p x^6)(q x^6)), R(p^{6\tau}) > R(p x^6).$

§ 4. Axiome und Grundsclußregeln

4.1. Induktive Definition:

Positivteile einer Formel t sind - t selbst,

- mit $N(Nq)$ auch $q,$
- mit Apq auch p und $q.$

Eine Formel t mit ausgezeichneten Variablen $z_1^0 \dots z_n^0 \quad (n > 0)$ heißt eine n -stellige Positivform, wenn $z_1 \dots z_n$ paarweise verschieden sind und jedes z_j an genau einer Stelle in t auftritt, und wenn jedes z_j ein Positivteil von t ist.

Als Mitteilungszeichen werden $F[z_1 \dots z_n], G[z_1 \dots z_n]$ für Positivformen verwendet. $F[p_1 \dots p_n]$ sei $F[z_1 \dots z_n]_{\substack{z_1 \dots z_n \\ p_1 \dots p_n}}$ und $p_1 \dots p_n$ werden dann als Formeln vorausgesetzt.

4.2. Definition einiger konstanter Terme:

$$I_{\tau} := S_{\tau}(\tau\tau)\tau^K(\tau\tau)\tau^K\tau\tau.$$

$$\mathcal{V} := E_{00}I_0I_0. \quad (\mathcal{V} \text{ ist die "wahre Aussage".})$$

$\prod_{\tau} := E_{\tau 0}(K_{\tau 0}\mathcal{V}).$ ($\prod_{\tau}$ ist der Generalisator für die Objekte vom Typ τ , wie in 5.9 näher erläutert wird.)

$\mathcal{A} := N(\prod_0(S_{000}AN)).$ ($\mathcal{A}$ ist die "falsche Aussage", die Verneinung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.)

4.3. Als Primformeln bezeichnen wir Formeln der Gestalt x^0 oder $E_1x^1x^1$.

4.4. Axiome sind Formeln der Gestalt $G[p, Np]$, wobei p eine Primformel ist.

Wir schreiben manchmal $\neg p$ statt Np und $p \vee q$ statt Apq .

4.5. Grundschiußregeln:

$$A \ 1. \quad \frac{F[Np] \quad F[Nq]}{F[N(Apq)]}$$

$$A \ 2. \quad \frac{F[A(Np)q] \quad F[A(Nq)p]}{F[E_0pq]}$$

$$A \ 3. \quad \frac{F[E_{\tau}(px^6)(qx^6)]}{F[E_{6\tau}pq]}$$

wenn die Variable x nicht in der Konklusion auftritt.

$$A \ 4. \quad \frac{F[k^R t_1 \dots t_n]}{F[kt_1 \dots t_n]} \quad \text{und} \quad \frac{F[N(k^R t_1 \dots t_n)]}{F[N(kt_1 \dots t_n)]}$$

(wobei k eine Kombination vom Typ $\tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n \geq 0$) sein möge.)

Die übrigen Grundschiußregeln sind Streichungsregeln. Für C ist jeweils die Konklusion des betreffenden Grundschlusses zu lesen.

$$B\ 1. \quad \frac{C \vee A p q \quad C \vee A(Np)(Nq)}{F[N(E_0 p q)]}$$

$$B\ 2. \quad \frac{C \vee N(E_{\tau}(p^{\delta})(q^{\delta}))}{F[N(E_{\delta\tau} p q)]}$$

$$C\ 1. \quad \frac{C \vee E p_i q_i \quad (i = 1 \dots n)}{G[x p_1 \dots p_n, N(x q_1 \dots q_n)]}$$

$$C\ 2. \quad \frac{C \vee E p_i q_i \quad (i = 1 \dots n)}{F[E_1(x p_1 \dots p_n)(x q_1 \dots q_n)]}$$

(wobei x in C1 vom Typ $\tau_1 \dots \tau_n 0$ und bei C2 vom Typ $\tau_1 \dots \tau_n 1$ sein möge. Das Symbol E in der i-ten Prämisse ist mit dem unteren Typ τ_i zu lesen.)

$$D \quad \frac{C \vee E_1 p' p'' \quad C \vee E_1 q' q''}{G[E_1 p' q', N(E_1 p'' q'')]} \quad \text{und}$$

$$E\ a. \quad \frac{C \vee E_1(k^R t_1 \dots t_n)s}{F[E_1(kt_1 \dots t_n)s]} \quad \text{und} \quad \frac{C \vee N(E_1(k^R t_1 \dots t_n)s)}{F[N(E_1(kt_1 \dots t_n)s)]}$$

$$E\ b. \quad \frac{C \vee E_1 s(k^R t_1 \dots t_n)}{F[E_1 s(kt_1 \dots t_n)]} \quad \text{und} \quad \frac{C \vee N(E_1 s(k^R t_1 \dots t_n))}{F[N(E_1 s(kt_1 \dots t_n))]}$$

(In Ea und Eb sei die Kombination k vom Typ $\tau_1 \dots \tau_n 1$, $n \geq 0$.)

$$F. \quad \frac{p \vee N(E_1 I_1 I_1)}{p}$$

$$G. \quad \frac{p \vee \wedge}{p}$$

Bemerkung: Die Grundschiußregel G ist (zusammen mit den Axiomen und den anderen Grundschiußregeln) äquivalent zu der Schnittregel

$$\frac{p \vee r \quad q \vee \neg r}{p \vee q}$$

4.6. Induktive Definition der Herleitbarkeit mit Ordnung h:

4.6.1. Jedes Axiom ist mit der Ordnung 0 herleitbar.

4.6.2. Sind die n Prämissen eines Grundschlusses mit den Ordnungen $h_1 \dots h_n$ herleitbar, so ist die Konklusion des Grundschlusses mit der Ordnung $\text{Max}(h_1 \dots h_n) + 1$ herleitbar.

4.7. Eine Formel heißt streng herleitbar, wenn sie ohne Benutzung der "Schnittregel" G herleitbar ist.

4.8. Sind für $n \geq 1$ $p_1 \dots p_n$ sowie q Formeln, so heißt die Schlussregel $p_1 \dots p_n \vdash q$ zulässig, wenn gilt: Sind $p_1 \dots p_n$ herleitbar, so ist auch q herleitbar.

§ 5. Herleitbarkeitseigenschaften

5.1. Aussagenlogische Abgeschlossenheit des Systems:

Für jeden Term t ist streng herleitbar

- $G[t, Nt]$, sofern t eine Formel ist,
- $F[Ett]$, wenn t einen von 0 verschiedenen Typ hat.

(Aus $F[Nt \vee t]$ ist mit A2 dann auch für t , das den Typ 0 hat, $F[Ett]$ streng herleitbar.)

Beweis durch Induktion nach dem Rang von t .

5.1.1. Ist t eine Variable x^0 , so ist $G[t, Nt]$ Axiom.

5.1.2. t sei eine Formel $x_{p_1} \dots p_n$. $G[t, Nt]$ folgt mit G1 aus $G[t, Nt] \vee E p_i p_i$ ($i = 1 \dots n$), und diese n Formeln sind nach Induktionsvor. streng herleitbar, da $R p_i < R(x_{p_1} \dots p_n)$.

5.1.3. t sei Np . Dann kann $G[Np, \neg Np]$ aufgefaßt werden als $F[Np, p]$, und es gilt $R p < R(Np)$.

5.1.4. t sei Apq . $G[Apq, N(Apq)]$ folgt mit A1 aus $G[Apq, Np]$ und $G[Apq, Nq]$, und es gilt $R p, R q < R(Apq)$.

5.1.5. t sei $E_1 pq$. $G[E_1 pq, N(E_1 pq)] =: r$ folgt mit D aus $r \vee E_1 pp$ und $r \vee E_1 qq$, und es gilt $R p, R q < R(E_1 pq)$.

5.1.6. t sei E_0pq . $G[t, Nt]$ folgt aus $G[\neg p \vee q, Nt] =: r$ und $G[\neg q \vee p, Nt] =: s$ mit A2. Dann folgt etwa r mit B1 aus $r \vee Apq$ (das Positivteile p und $\neg p$ enthält) und $r \vee A(Np)(Nq)$ (mit Positivteilen q und $\neg q$), und es gilt $Rp, Rq < R(E_0pq)$. Analog weist man s als streng herleitbar nach.

5.1.7. t sei $E_{\delta\delta}pq$. $G[E_{\delta\delta}pq, N(E_{\delta\delta}pq)]$ erhält man, indem auf $G[E_{\delta}(px)(qx), Nt] \vee N(E_{\delta}(px)(qx))$ mit geeignetem x (es ist $R(E_{\delta}(px)(qx)) < R(E_{\delta\delta}pq)$) B2 und dann A3 angewendet.

5.1.8. t sei eine Formel $kp_1 \dots p_n$. Man wende zweimal A4 auf $G[k^R_{p_1} \dots p_n, N(k^R_{p_1} \dots p_n)]$ an. ($R(k^R_{p_1} \dots p_n) < Rt$.)

5.1.9. t sei $p^{6\delta}$. $F[E_{\delta\delta}pp]$ folgt mit A3 aus $F[E_{\delta}(px)(px)]$ bei passender Wahl von x , und es ist $R(px) < Rp$.

5.1.10. t sei x^1 . $F[E_1xx] =: r_1$ folgt aus $r_1 \vee N(EI_1I_1)$, wofür wir r_2 schreiben, mit F. r_2 folgt aus $r_2 \vee N(E_1(Ix)(Ix)) =: r_3$ mit B2, r_3 mit zweimaliger Anwendung von Ea aus $(r_3 \vee \neg E_1(Kx(Kx))(Ix)) \vee \neg E_1x(SKx) =: r_4$, und r_4 mit zweimal Eb aus dem Axiom $(r_4 \vee \neg E_1x(Kx(Kx))) \vee \neg E_1xx$.

5.1.11. t sei $xp_1 \dots p_n$ vom Typ 1. $F[E_1tt]$ folgt mit G2 aus $F[E_1tt] \vee Ep_i p_i$ ($i = 1 \dots n$) und es gilt $Rp_i < Rt$.

5.1.12. t sei $kp_1 \dots p_n$ vom Typ 1. Weil $R(k^R_{p_1} \dots p_n) < Rt$, hat man $(F[E_1tt] \vee E_1(k^R_{p_1} \dots p_n)t) \vee E_1(k^R_{p_1} \dots p_n)(k^R_{p_1} \dots p_n)$ nach Induktionsvor. und leitet mit Eb und Ea $F[E_1tt]$ her.

5.2. Die folgenden Schlußregeln sind zulässig:

(Vertauschung) $G[p, q] \vdash G[q, p]$,

(Variablensubstitution) $p \vdash p(\frac{x}{y})$,

(Schwächung) $F[q] \vdash F[G[q]]$,

sowie die Inversionen der vier A-Grundschlüsse, die A3-Inversion in der Form: $F[E_{\delta\tau}pq] \vdash F[E_{\tau}(px)(qx)]$ für alle x^6 .

Eine solche Schlußregel $s \vdash t$ zeige man wie in [5] §4 in der stärkeren Form: Ist s aufgrund einer angenommenen Herleitung mit der Ordnung h herleitbar, so kann t mit Ordnung $h' \leq h$ hergeleitet werden. Das wird gezeigt durch Induktion nach der Herleitungsordnung h der Prämisse s .

5.3. Die folgenden Modifikationen von Grundschiußregeln sind zulässig:

(B1') $F[p], F[\neg q] \vdash F[\neg E_0 pq]$ und $F[\neg p], F[q] \vdash F[\neg E_0 pq]$.

(B2') $F[\neg E_\tau(pt^6)(qt^6)] \vdash F[\neg E_{6\tau} pq]$.

(Ea') $F[(\neg)E_1(k^R t_1 \dots t_n)s] \vdash F[(\neg)E_1(kt_1 \dots t_n)s]$, wobei $(\neg)$ beidemal zu lesen oder in beiden Fällen wegzulassen ist.

(Eb') erhält man aus Ea', indem man in Prämisse und Konklusion von Ea' die Argumente des Funktionals E_1 vertauscht.

(F') $p \vee \neg E_1 qq \vdash p$.

Beweis von F': Aus $p \vee \neg E_1 qq$ folgt $p \vee \neg E_1(I_1 q)q$ mit zweimal Ea', daraus $p \vee \neg E_1(Iq)(Iq)$ mit zweimal Eb', daraus $p \vee \neg E_{II}$ mit B2', und mit F leitet man daraus p her.

Die übrigen Schlußregeln folgen mit Hilfe der ungestrichenen Grundschiußregel sowie Schwächung und Vertauschung.

5.4. Die Schnittregel

5.4.1. Induktive Definition von $F[]$ nach der Länge der Positivform $F[z]$, d. h. der Anzahl von Zeichen A und N:

- Ist $F[z] = z$, so sei $F[] := \wedge$.
- Für $F[z] = G[N(Nz)]$ sei $F[] := G[]$.
- Ist $F[z] = G[Azq]$ oder $G[Aqz]$, so sei $F[] := G[q]$.

5.4.2. Es ist zulässig: $F[\wedge] \vdash F[]$.

Das wird bewiesen durch triviale Induktion nach der Länge von $F[z]$, unter Benutzung der Grundschiußregel G.

5.4.3. Die Schnittregel $F[q], F[\neg q] \vdash F[]$ ist zulässig.

Denn aus $F[\neg q]$ und $F[\neg \neg q]$ (das aus $F[q]$ mit Schwächung folgt) hat man mit A1 $F[\neg Aq(Nq)]$ und daraus $F[\neg S_{000} ANq]$ mit A4. Aus $F[K_{00} \vee q]$ (das mit A4 aus herleitbarem $F[\vee]$ folgt) und $F[\neg S_{000} ANq]$ bekommt man $F[\neg E_0(K \vee q)(SANq)]$ mit B1', daraus mit B2' $F[\neg E_{00}(K \vee)(SAN)]$, das ist $F[\wedge]$, und daraus hat man wegen 5.4.2 $F[]$.

5.5. Die Symmetrieregeln $F[E_\tau pq] \vdash F[E_{\tau qp}]$ ist zulässig.

Beweis durch Induktion nach der Herleitung des Typs τ :

5.5.1. $\tau = 0$ wird trivial mit A2-Inversion erledigt.

5.5.2. $\tau = 1$:

Aus $F[E_1pq]$ folgt mit Schwächung $(F[E_1pq] \vee \neg E_1qq) \vee E_1qp$, mit Vertauschung daraus $(F[E_1qp] \vee \neg E_1qq) \vee E_1pq$. Aus dieser Formel und streng herleitbarem $(F[E_1qp] \vee \neg E_1qq) \vee E_1qq$ folgt mit D $F[E_1qp] \vee \neg E_1qq$, daraus mit F' $F[E_1qp]$.

5.5.3. $\tau = \wp_6$:

Aus $F[E_{\wp_6}pq]$ folgt mit A3-Inversion $F[E_6(px^{\wp_6})(qx^{\wp_6})]$, nach Induktionsvoraussetzung daraus $F[E_6(qx^{\wp_6})(px^{\wp_6})]$, und daraus mit A3 $F[E_{\wp_6}qp]$ bei passender Wahl von $x^{\wp_6}$.

5.6. Die Transitivitätsregel $F[E_{\tau}pr], F[E_{\tau}qr] \vdash F[E_{\tau}pq]$
ist zulässig:

Beweis durch Induktion nach der Herleitung des Typs τ .

5.6.1. $\tau = 0$:

Aus den Prämissen hat man mit A2-Inversion die 4 Formeln $F[\neg pvr], F[\neg rvp], F[\neg rvq], F[\neg qvr]$. Aus diesen folgen mit Vertauschung und Schwächung: $F[(\neg pvq) \vee r]$ und $F[(\neg pvq) \vee \neg r]$, $F[(\neg qvp) \vee r]$, $F[(\neg qvp) \vee \neg r]$. Mit 2 Schnitten erhält man $F[\neg pvq]$ und $F[\neg qvp]$, daraus folgt $F[E_0pq]$ mit A2.

5.6.2. $\tau = 1$:

Aus den beiden Prämissen folgen mit Schwächung die Formeln $(F[E_1pr] \vee \neg E_1rr) \vee E_1pq$ und $(F[E_1qr] \vee \neg E_1rr) \vee E_1pq$. Daraus hat man $(F[E_1pq] \vee \neg E_1rr) \vee E_1pr$ sowie $(F[E_1pq] \vee \neg E_1rr) \vee E_1qr$ durch Vertauschung. Mit D folgt $F[E_1pq] \vee \neg E_1rr$, mit F' $F[E_1pq]$.

5.6.3. $\tau = \wp_6$:

Ähnlich wie in 5.5.3 wendet man auf die beiden Prämissen A3-Inversion an und benützt die Induktionsvoraussetzung.

5.7. Die Gleichheitsregel

$E_{\tau_i} a_i b_i \ (i = 1 \dots n) \vdash E_{\tau} t \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{smallmatrix} \right) t \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ b_1 \dots b_n \end{smallmatrix} \right)$ ist zulässig;

für $i = 1 \dots n$ ($n > 0$) seien dabei a_i und b_i Terme von demselben Typ τ_i wie die Variable x_i . t sei ein Term vom Typ τ .

Ist p ein Mitteilungszeichen für einen Term beliebigen Typs, so schreiben wir $p' := p(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_n)$, $p'' := p(x_1 \dots x_n, b_1 \dots b_n)$.

Bemerkung: Für eine Formel t ist die genannte Schlußregel $Ea_i b_i$ ($i=1 \dots n$) $\vdash Et't''$ zu $Ea_i b_i$ ($i=1 \dots n$) $\vdash t' \vee \neg t''$ äquivalent, ist also eine dieser beiden Schlußregeln zulässig, so auch die andere.

Wir sprechen bei dieser Schlußregel von einer Ersetzung der Variablen $x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n}$ in dem Term t . Unter diesen Voraussetzungen wird definiert: $Mt := \text{Max}(g\tau_1 \dots g\tau_n)$. Mt hängt also außer von t auch von den Typen der in t ersetzten Variablen ab. Die Gleichheitsregel wird nun bewiesen durch Induktion nach der Ordinalzahl $\omega \cdot Mt + \text{Rang } t$, wobei wir die jeweils bequemere der beiden äquivalenten Schlußregeln benutzen:

5.7.1. t sei y^0 oder y^1 , wobei y mit keinem der $x_1 \dots x_n$ übereinstimmt. $Et't''$ ist Eyy , also streng herleitbar.

5.7.2. t sei eine ersetzte Variable x_k vom Typ 0 oder 1. Dann ist $Et't'' = Ea_k b_k$ eine der Prämissen.

5.7.3. t habe die Gestalt $y^{\delta_1 \dots \delta_m \gamma} p_1 \dots p_m$, $m > 0$, wobei y keine der ersetzten Variablen ist.

Aus $Ea_i b_i$ ($i=1 \dots n$) folgt $Ep_j' p_j''$ ($j=1 \dots m$) nach Induktionsvoraussetzung, da $Mp_j = Mt$ und $Rp_j < R(yp_1 \dots p_m)$ gilt. Aus diesen m Formeln folgt mit Schwächung und C1 bzw. C2 - je nachdem, ob γ 0 oder 1 ist - $yp_1' \dots p_m' \vee \neg yp_1'' \dots p_m''$ bzw. $E_1(yp_1' \dots p_m')(yp_1'' \dots p_m'')$, das ist $t' \vee \neg t''$ bzw. $E_1 t't''$.

5.7.4. t sei $x_k^{\delta_1 \dots \delta_m \gamma} p_1 \dots p_m$, $m > 0$.

Aus $Ea_i b_i$ ($i=1 \dots n$) folgt $Ep_j' p_j''$ ($j=1 \dots m$) nach Induktionsvoraussetzung, da $Mp_j = Mt$ und $Rp_j < R(x_k p_1 \dots p_m)$.

Aus diesen m Formeln folgt nach Induktionsvoraussetzung:

(1) $E(b_k p_1' \dots p_m')(b_k p_1'' \dots p_m'')$.

(Hier handelt es sich um eine Ersetzung von $z_1^{\delta_1} \dots z_m^{\delta_m}$ - die paarweise verschieden sein und in b_k nicht vorkommen sollen - in dem Term $b_k z_1 \dots z_m$ und es gilt:

$$M(b_k z_1 \dots z_m) = \text{Max}(g_1^6 \dots g_m^6) < \text{Max}(g_1^{6+1} \dots g_m^{6+1}, g_1^7) = \\ = g_1^{6+1} \dots g_m^{6+1} = g_k^7 \leq \text{Max}(g_1^7 \dots g_n^7) = M(x_k p_1 \dots p_m).$$

Aus (1) folgt wegen der Symmetrie von E:

$$(2) E(b_k p_1'' \dots p_m'')(b_k p_1' \dots p_m').$$

Aus $\neg E(a_k p_1' \dots p_m')(b_k p_1' \dots p_m') \vee E(a_k p_1' \dots p_m')(b_k p_1' \dots p_m')$ folgt mit m Schlüssen B2': $\neg E a_k b_k \vee E(a_k p_1' \dots p_m')(b_k p_1' \dots p_m')$. Aus dieser Formel und der Prämisse $E a_k b_k$ folgt mit einem Schnitt

$$(3) E(a_k p_1' \dots p_m')(b_k p_1' \dots p_m').$$

Aus (3) und (2) hat man wegen der Transitivität von E die gewünschte Formel $E(a_k p_1' \dots p_m')(b_k p_1'' \dots p_m'')$, das ist $E t' t''$.

Die verbleibenden Fälle (t der Gestalt $Np, Apq, Epq, kp_1 \dots p_m$ vom Typ 0 oder 1, p_1^{6q}) zeigt man (formal ähnlich wie beim Beweis von 5.1) durch triviale Induktion nach dem Ranganteil von $\omega \cdot Mt + Rt$, d. h. bei diesen Beweisschritten werden die ersetzten Variablen stets beibehalten.

Die Ersetzungsregel $t(\frac{x}{p}), Epq \vdash t(\frac{x}{q})$ ist zulässig.

Denn aus Epq hat man wegen der Symmetrie Eqp , woraus man mit der eben gezeigten Gleichheitsregel $t(\frac{x}{q}) \vee \neg t(\frac{x}{p})$ hat. Schnitt mit $t(\frac{x}{p})$ leitet die gewünschte Formel daraus her.

Bemerkung: Mit dieser Ersetzungsregel und Gleichheitsregel sowie 5.1 (Reflexivität von E), 5.5 und 5.6 ist gezeigt, daß die Funktionale E_τ syntaktisch alle Erfordernisse einer Gleichheit erfüllen.

5.8. λ -Abstraktion

5.8.1. Induktive Definition von $\lambda x^6. p^\tau$:

- $\lambda x^\tau. x^\tau := I_\tau$.
- $\lambda x^6. p^\tau := K_{6\tau} p^\tau$, wenn p^τ ein Grundterm ist, der nicht mit der Variable x übereinstimmt.
- $\lambda x^6. p^{6\tau} q^6 := S_{6\tau}(\lambda x^6. p^{6\tau})(\lambda x^6. q^6)$.

$\lambda x^6. p^\tau$ ist ein Term vom Typ 6τ , in dem die Variable x^6 nicht vorkommt.

5.8.2. $E_k k^R$ ist herleitbar für jede Kombination k^T .

Das zeigt man trivial mit Hilfe von A4 bzw. Ea'.

5.8.3. Es ist herleitbar: $E_T((\lambda x^6.p^T)t^6)(p^T(x_t^6))$.

Das wird gezeigt durch Induktion nach 5.8.1. Für einen Grundterm p folgt es sofort aus 5.8.2. Hat jedoch p^T die Gestalt $q^T r^S$, so sind folgende Formeln herleitbar:

$E(\lambda x.q)t(\lambda x.r)t(\lambda x.q)t((\lambda x.r)t)$ (nach 5.1)

$E(\lambda x.r)t r(\frac{x}{t})$, $E(\lambda x.q)t q(\frac{x}{t})$ (Induktionsvoraussetzung)

und zweimalige Anwendung der Ersetzungsregel in 5.7 leitet $E q(\frac{x}{t})r(\frac{x}{t})(\lambda x.q)t((\lambda x.r)t)$ daraus her. Aus dieser Formel und $E S(\lambda x.q)(\lambda x.r)t(\lambda x.q)t((\lambda x.r)t)$, das nach 5.8.2 herleitbar ist, folgt wegen der Transitivität von E die gewünschte Formel $E S(\lambda x.q)(\lambda x.r)t q(\frac{x}{t})r(\frac{x}{t})$.

5.8.4. $F[p(\frac{x}{t})] \vdash F[(\lambda x.p)t]$ und $F[\neg p(\frac{x}{t})] \vdash F[\neg(\lambda x.p)t]$ sind

zulässig. Diese beiden Schlußregeln entsprechen den Komprehensionsregeln in formalen Systemen der einfachen Typenlogik, z. B. in [5] den Grundsclußregeln S4a und S4b.

(Das folgt aus 5.8.3 mit der Ersetzungsregel in 5.7.)

5.9. Generalisierung

Die beiden folgenden Schlußregeln sind zulässig:

$F[p^{60}x^6] \vdash F[\prod_6 p^{60}]$, wenn x nicht in $F[\prod_6 p]$ auftritt.

$F[\neg p^{60}t^6] \vdash F[\neg \prod_6 p^{60}]$.

Diese beiden Schlußregeln entsprechen den Generalisierungsregeln in formalen Systemen der einfachen Typenlogik, z. B. in [5] den Grundsclußregeln S2 und S3.

$\prod_6 p^{60}$ hat die Bedeutung "das Prädikat p trifft auf alle Objekte vom Typ 6 zu" oder "für alle Terme t^6 gilt pt^6 ".

Beweis der ersten Regel:

$F[\prod_6 p] = F[E_{60}(K_{60} \vee p)]$ folgt aus $F[E_0(K \vee x)(px)]$ mit A3, diese Formel aus $F[\neg K \vee x \vee px]$ und $F[\neg px \vee K \vee x]$ mit A2. Die erste dieser Formeln folgt mit Schwächung aus der Prämisse,

die zweite mit A4 aus $F[\neg px \vee \vee]$, die man nach 5.1 hat.

Beweis der zweiten Regel: $F[\neg \prod_6 p] = F[\neg E_{60}(K \vee) p]$ folgt mit B2' aus $F[\neg E_{60}(K \vee t)(pt)]$, diese mit B1' aus $F[K \vee t]$, das mit A4 aus $F[\vee]$ folgt, und der Prämisse $F[\neg pt]$.

Die allgemeine Substitutionsregel $p \vdash p(\frac{x}{t})$ ist zulässig.

Denn aus p folgt mit 5.8.4 $(\lambda x.p)x$, daraus mit der 1. Generalisierungsregel $\prod_6 (\lambda x.p)$. Aus herleitbarem $\neg p(\frac{x}{t}) \vee p(\frac{x}{t})$ folgt mit 5.8.4 $\neg(\lambda x.p)t \vee p(\frac{x}{t})$, daraus mit der 2. Generalisierungsregel $\neg \prod_6 (\lambda x.p) \vee p(\frac{x}{t})$. Ein Schnitt leitet $p(\frac{x}{t})$ her.

Die Schlußregel $F[\prod_6 p^{60}] \vdash F[pt^6]$ ist zulässig.

Aus $F[E_{60}(K \vee) p]$ folgt mit A3-Inversion $F[E_{60}(K \vee y)(py)]$, daraus mit A2-Inversion $F[\neg K \vee y \vee py]$. Durch Schnitt dieser Formel mit herleitbarem $F[K \vee y \vee py]$ hat man $F[py]$, mit der soeben gezeigten allgemeinen Substitutionsregel $F[pt]$.

§ 6. Deduktionsfäden

6.1. Als Minimalteile einer Formel t bezeichnen wir Positivteile von t , die keinen Positivteil echt enthalten.

6.2. Klassifikation von Minimalteilen einer Formel t :

- Minimalteile der Gestalt $N(Apq)$, E_0pq , $E_{6\tau}pq$, $kp_1 \dots p_n$ oder $N(kp_1 \dots p_n)$ heißen A-Teile von t .

- Minimalteile $N(E_0pq)$ heißen B1-Teile von t .

- Minimalteile $N(E_{6\tau}pq)$ heißen B2-Teile von t .

- Enthält t zwei Minimalteile der Gestalten $xp_1 \dots p_n$ und $\neg xq_1 \dots q_n$ (mit derselben Variablen x), so nennen wir $\langle xp_1 \dots p_n, N(xq_1 \dots q_n) \rangle$ ein C1-Paar von t .

- Minimalteile der Gestalt $E_1(xp_1 \dots p_n)(xq_1 \dots q_n)$ heißen C2-Teile von t .

- Enthält t einen Minimalteil $E_4p'q'$ und einen Minimalteil

$N(E_1 p "q")$, so heißt $\langle E p "q", N(E p "q") \rangle$ ein D-Paar von t.

- Minimalteile der Gestalt $E_1 p q$ oder $N(E_1 p q)$ heißen E-Teile von t, wenn mindestens einer der beiden Terme p und q mit einem Kombinator K oder S beginnt.

Im folgenden sei die Reihenfolge aller im Sinne dieser Klassifikation gleichartigen Teile und Paare, die in einer Formel t vorkommen, geeignet normiert.

Unter der Adjunktion der Formeln t und $a_1 \dots a_n$ verstehen wir - $((\dots((t \vee a_1) \vee a_2) \vee \dots) \vee a_{n-1}) \vee a_n)$, wenn $n > 0$ ist, und
- t selbst, wenn $n = 0$.

6.3. Für jeden Typ τ sei eine feste Abzählung $s_1^\tau s_2^\tau s_3^\tau \dots$ aller Terme vom Typ τ vorausgesetzt. (Da die Grundterme und Typen abzählbar sind, sind auch die Terme abzählbar.)

6.4. Definition:

6.4.1. Reduktion:

$b_1 \dots b_n$ seien alle A-Teile von t. Für $n > 0$ teilen wir dann t mit als $G[b_1 \dots b_n]$. Unter einer Reduktion von t verstehen wir 6.4.1.1. die Formel t selbst, sofern $n = 0$,

6.4.1.2. jede Formel der Gestalt $G[b_1^+ \dots b_n^+]$ für $n > 0$, wenn jedes b_j^+ ein Reduktum von b_j gemäß der Tabelle ist:

A-Teil	Redukta dieses A-Teils
$N(A p q)$	$N p$ und $N q$
$E_0 p q$	$A(N p) q$ und $A(N q) p$
$E_{\delta\tau} p q$	$E_\tau(p x^\delta)(q x^\delta)$, wobei x nicht in $E_{\delta\tau} p q$ auftrete
$k p_1 \dots p_n$	$k^R p_1 \dots p_n$
$N(k p_1 \dots p_n)$	$N(k^R p_1 \dots p_n)$

und wenn alle Variablen, die durch den Übergang von einem b_j der Gestalt $E_{\delta\tau} p q$ zu dessen Reduktum neu auftreten, paarweise verschieden sind und auch nicht in t vorkommen.

6.4.2. B1-Schwächung:

$N(E_0 p_1 q_1) \dots N(E_0 p_n q_n)$, $n \geq 0$, seien alle B1-Teile von t . Unter einer B1-Schwächung von t verstehen wir dann die Adjunktion von t und $a_1 \dots a_n$, sofern für $j = 1 \dots n$ a_j entweder $A p_j q_j$ oder $A(N p_j)(N q_j)$ ist.

6.4.3. Die k-te Schwächung:

$N(E_{\delta_i \tau_i} p_i q_i)$ ($i = 1 \dots n$, $n > 0$) seien alle B2-Teile von t . Die k-te Schwächung von t ist die Adjunktion von t und den $n \cdot k$ Formeln $N(E_{\tau_i} (p_i s_j^{i1})(q_i s_j^{i1}))$ ($i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots k$), deren Reihenfolge passend normiert sei. $s_1^{i1} \dots s_k^{i1}$ sind die ersten k Terme vom Typ δ_i gemäß der Abzählung in 6.3.

6.4.4. C1-Schwächung:

$\langle b'_1, N b''_1 \rangle \dots \langle b'_n, N b''_n \rangle$ ($n \geq 0$) seien alle C1-Paare von t . Unter einer C1-Schwächung von t verstehen wir dann die Adjunktion von t und $a_1 \dots a_n$, wenn für $j = 1 \dots n$ gilt: Ist $b'_j = x p_1 \dots p_m$ und ist $b''_j = x q_1 \dots q_m$, so ist a_j eine der Formeln $E p_i q_i$, i aus $1 \dots m$.

6.4.5. C2-Schwächung:

$E_1 b'_1 b''_1 \dots E_1 b'_n b''_n$ ($n \geq 0$) seien alle C2-Teile von t . Unter einer C2-Schwächung von t verstehen wir die Adjunktion von t und $a_1 \dots a_n$, wenn für $j = 1 \dots n$ gilt: Für $b'_j = x p_1 \dots p_m$, $b''_j = x q_1 \dots q_m$ ist a_j $E p_i q_i$, i aus $1 \dots m$.

6.4.6. D-Schwächung:

$\langle b'_1, N b''_1 \rangle \dots \langle b'_n, N b''_n \rangle$ ($n \geq 0$) seien alle D-Paare von t . Unter einer D-Schwächung von t verstehen wir die Adjunktion von t und $a_1 \dots a_n$, wenn für $j = 1 \dots n$ gilt: Ist $b'_j = E_1 p' q'$ und $b''_j = E_1 p'' q''$, so ist a_j entweder $E_1 p' p''$ oder $E_1 q' q''$.

6.4.7. E-Schwächung:

$b_1 \dots b_n$ ($n \geq 0$) seien alle E-Teile von t . Die E-Schwächung von t ist die Adjunktion von t und $a_1 \dots a_{2n}$, wobei für $j = 1 \dots n$ a_{2j-1} und a_{2j} definiert sind wie folgt:

(In den folgenden 3 Bedingungen ist das eingeklammerte $\neg$ überall mitzulesen oder überall wegzulassen.)

a) Ist $b_j = (\neg)E_1(kp_1 \dots p_m)s$, wobei k eine Kombination vom Typ $\tau_1 \dots \tau_m$ ist und der Term s mit einer Variable beginnt, so seien a_{2j-1} und a_{2j} beide $(\neg)E_1(k^R p_1 \dots p_m)s$.

b) Ist $b_j = (\neg)E_1s(kp_1 \dots p_m)$ mit denselben Bedingungen wie unter a, so seien a_{2j-1} und $a_{2j} = (\neg)E_1s(k^R p_1 \dots p_m)$.

c) Ist jedoch $b_j = (\neg)E_1(kp_1 \dots p_m)(hq_1 \dots q_r)$, wo k und h Kombinationen vom Typ $\tau_1 \dots \tau_m$ bzw. $\delta_1 \dots \delta_r$ sind, so sei $a_{2j-1} = (\neg)E_1(k^R p_1 \dots p_m)(hq_1 \dots q_r)$ und $a_{2j} = (\neg)E_1(kp_1 \dots p_m)(h^R q_1 \dots q_r)$.

6.5. Definition:

Ein Deduktionsfaden einer Formel t ist eine Folge $f_0, f_1, f_2 \dots$ von Formeln, so daß gilt:

6.5.1. f_0 ist die Formel $t \vee N(E_1 I_1 I_1)$.

6.5.2. Ist f_n ein Axiom, so bricht der Faden bei dieser Formel f_n ab.

6.5.3. Ist f_n kein Axiom, so enthält der Faden eine Formel f_{n+1} und zwar gilt: Läßt n bei der Division durch 7 den Rest r übrig, so ist f_{n+1}

- eine Reduktion von f_n für $r=1$,
- die E-Schwächung von f_n für $r=2$,
- eine G1-Schwächung von f_n für $r=3$,
- eine G2-Schwächung von f_n für $r=4$,
- eine D-Schwächung von f_n für $r=5$,
- eine B1-Schwächung von f_n für $r=6$,
- und die n -te Schwächung von f_n für $r=0$.

6.6. Bemerkung:

Ein Deduktionsfaden, der kein Axiom enthält, ist unendlich.

6.7. Lemma:

Ein Deduktionsfaden, der kein Axiom enthält, hat definitionsgemäß folgende Eigenschaften:

6.7.1. Enthält f_n einen Positivteil der Gestalt $x^0, \neg x^0, E_1 x x$ oder $\neg E_1 x x$, so tritt dieser Positivteil in allen auf f_n folgenden Formeln des Fadens ebenfalls auf.

6.7.2. $\neg E_1 I_1 I_1$ tritt in f_0 als Positivteil auf.

6.7.3. Enthält f_n einen Positivteil wie in der linken Spalte folgender Tabelle, so treten die Formeln, die rechts daneben genannt sind, in einer der 7 auf f_n folgenden Formeln des Fadens als Positivteile auf:

$\neg(p \vee q)$	: $\neg p$ oder $\neg q$
$\neg E_0 pq$	: p und q , oder $\neg p$ und $\neg q$
$E_0 pq$	: $\neg p$ und q , oder p und $\neg q$
$E_{\tau} pq$	: $E_{\tau}(px)(qx)$
$(\neg)k_{p_1} \dots p_r$	: $(\neg)k_{p_1}^R \dots p_r$
$E_1(xp_1 \dots p_r)(xq_1 \dots q_r)$	: $E_{p_1 q_1}$ für ein i aus $1 \dots r$
$(\neg)E_1(kp_1 \dots p_r)s$	: $(\neg)E_1(k_{p_1}^R \dots p_r)s$
$(\neg)E_1 s(kp_1 \dots p_r)$	: $(\neg)E_1 s(k_{p_1}^R \dots p_r)$

6.7.4. Tritt $xp_1 \dots p_r / E_1 p'q'$ in f_n und $\neg xq_1 \dots q_r / \neg E_1 p''q''$ in f_m als Positivteil auf, so sind diese Formeln Positivteile von f_j ($j = \text{Max}(m, n)$) und allen auf f_j folgenden Formeln des Fadens, und in einer der 7 auf f_j folgenden Formeln tritt $E_{p_1 q_1}$ (für ein i aus $1 \dots r$) / $E_1 p'p''$ oder $E_1 q'q''$ als Positivteil auf. (In diesem Satz ist bei den Schrägstrichen überall die linke oder überall die rechte Aussage zu lesen.)

6.7.5. Enthält f_n den Positivteil $\neg E_{\tau} pq$, so ist für ein beliebig gewähltes k und $j = \text{Max}(k, n)$ $\neg E_{\tau} pq$ Positivteil von f_j und allen auf f_j folgenden Formeln des Fadens, und in einer der 7 auf f_j folgenden Formeln tritt $\neg E_{\tau}(ps_k^6)(qs_k^6) - s_k$ im Sinn der Abzählung 6.3 - als Positivteil auf.

§ 7. Deduktionsfäden und strenge Herleitbarkeit

7.1. Lemma:

Ist eine Formel t nicht streng herleitbar, so gibt es einen Deduktionsfaden von t , der keine streng herleitbare Formel enthält. (Der Faden ist insbesondere unendlich.)

Beweis:

Wäre $f_0 = t \vee N(EI_1 I_1)$ streng herleitbar, so mit F auch t.

Für den Induktionsschritt gebe es ein Anfangsstück $f_0 f_1 \dots f_n$ eines Deduktionsfadens von t, das keine streng herleitbare Formel enthält. Wir zeigen: Ist jedes aufgrund der durch n festgelegten Operation Y mögliche f_{n+1} streng herleitbar, so wäre schon f_n streng herleitbar.

7.1.1. f_n habe keinen für Y passenden Minimalteil. Da dann $f_{n+1} = f_n$ gilt, ist nichts zu zeigen.

7.1.2. Y sei die Reduktion, f_n habe die Gestalt $G[b_1 \dots b_m]$ wie in 6.4.1.2.

Sei also $G[b_1^+ \dots b_m^+]$ streng herleitbar für jedes Tupel $\langle b_1^+ \dots b_m^+ \rangle$ von Redukta. Sind b^+ bzw. b' und b'' die Redukta des A-Teils b_1 , so sind $G[b^+, b_2^+ \dots b_m^+]$ bzw. $G[b' b_2^+ \dots b_m^+]$ und $G[b'' b_2^+ \dots b_m^+]$ streng herleitbar, und durch Anwendung des geeigneten A-Schlusses ist $G[b_1, b_2^+ \dots b_m^+]$ streng herleitbar für alle möglichen Tupel $\langle b_2^+ \dots b_m^+ \rangle$. Iteration dieses Verfahrens leitet $G[b_1 \dots b_m] = f_n$ streng her.

7.1.3. Y sei eine N-Schwächung, für die f_n mindestens einen passenden Teil enthält.

Sei also jedes mögliche f_{n+1} , d. h. $f_n \vee a_1 \vee \dots \vee a_m$ für alle denkbaren Tupel $\langle a_1 \dots a_m \rangle$ streng herleitbar. Sind $a_m^1 \dots a_m^r$ alle Formeln, die für a_m stehen können, so folgt aus

$(f_n \vee a_1 \vee \dots \vee a_{m-1}) \vee a_m^j$ ($j = 1 \dots r$) mit einem Grundsatz N $f_n \vee a_1 \vee \dots \vee a_{m-1}$ für alle denkbaren $\langle a_1 \dots a_{m-1} \rangle$. Iteration dieses Verfahrens gestattet f_n streng herzuleiten.

§ 8. Semiwertungen

8.1. Eine Semiwertung V

ist eine Zuordnung von höchstens einem der Wahrheitswerte w (wahr) und f (falsch) zu jeder Formel, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

Wir schreiben $p w$ und $p f$ statt "die Formel p hat den Wert w bzw. f " und $p u$ statt "die Formel p hat keinen Wert".

8.1.1. Ist $Np w$, so ist $p f$. Ist $Np f$, so ist $p w$.

8.1.2. Ist $Apq w$, so ist $(p w \text{ oder } q w)$.

Ist $Apq f$, so ist $(p f \text{ und } q f)$.

8.1.3. Ist $E_0pq w$, so ist $(p w \text{ und } q w)$ oder $(p f \text{ und } q f)$.

Ist $E_0pq f$, so ist $(p w \text{ und } q f)$ oder $(p f \text{ und } q w)$.

8.1.4. Ist $E_{\tau}pq w$, so ist $E_{\tau}(pt)(qt) w$ für jeden Term t .⁶

Ist $E_{\tau}pq f$, so ist $E_{\tau}(px)(qx) f$ für eine Variable x .⁶

8.1.5. Hat $kp_1 \dots p_n$ einen Wert, so hat $k^R p_1 \dots p_n$ denselben Wert.

8.1.6. Ist $xp_1 \dots p_n f$ und $xq_1 \dots q_n w$, so ist $Ep_i q_i f$ für ein i aus $1 \dots n$.

8.1.7. Ist $E_1(xp_1 \dots p_n)(xq_1 \dots q_n) f$, so ist $Ep_i q_i f$ für ein i aus $1 \dots n$.

8.1.8. Ist $E_1 p'q' f$, $E_1 p''q'' w$, so ist $E_1 p'p'' f$ oder $E_1 q'q'' f$.

8.1.9. Hat $E_1(kp_1 \dots p_n)q$ einen Wert, so hat $E_1(k^R p_1 \dots p_n)q$ denselben Wert. Hat $E_1 q(kp_1 \dots p_n)$ einen Wert, so hat $E_1 q(k^R p_1 \dots p_n)$ denselben Wert.

8.1.10. $E_{11}I_1I_1$ hat den Wert w .

8.2. Bemerkung: E_1pp ist w für jeden Term p vom Typ 1.

Denn aus $EI_1I_1 w$ folgt mit 8.1.4 $E_1(SKKp)(SKKp) w$ für jedes p , daraus mit 4maliger Anwendung von 8.1.9 $E_1pp w$.

8.3. Bemerkung: Ist $E_1pq f$, so ist auch $E_1qp f$.

(Aus $Epq f$, $E_1pp w$ folgt mit 8.1.8 $Epp f$ oder $Eqp f$.)

8.4. Bemerkung: Ist $E_1pq f$, so ist $E_1pr f$ oder $E_1qr f$.

(Das folgt mit 8.1.8, weil $E_{1r}r w$ für jeden Term r .¹.)

8.5. $p^1 \sim q^1$ bedeute: E_1pq ist w oder u . $\sim$ ist, wie aus 8.2, 8.3 und 8.4 hervorgeht, eine Äquivalenzrelation auf den Termen vom Typ 1.

§ 9. Semiwertungen und strenge Herleitbarkeit

9.1. Lemma:

V sei eine Zuordnung von höchstens einem oder auch beiden der Wahrheitswerte w und f zu jeder Formel, so daß gilt:

- a) Keine Primformel ist w und f in V.
- b) V erfüllt die Bedingungen 8.1.1 bis 8.1.10.

Dann ist keine Formel w und f in V, und keine Formel der Gestalt Epp hat den Wert f in V.

Inbesondere ist also dann V eine Semiwertung.

(Der Nachweis wird durch Induktion nach dem Rang geführt, in starker Analogie zum Beweis von 5.1.)

9.2. Hauptlemma:

Ist eine Formel nicht streng herleitbar, so gibt es eine Semiwertung, in der diese Formel den Wert f hat.

(Nach 7.1 hat sie einen unendlichen Deduktionsfaden. Mit der Festsetzung: t w bzw. f in V genau dann, wenn Nt bzw. t in einer Formel des Fadens Positivteil ist, wird die behauptete Semiwertung definiert, weil sich aus 6.7.1 bis 6.7.5 die Bedingungen von 9.1 a) und b) zeigen lassen.)

§ 10. Eine semantische Gleichheitseigenschaft

In diesem Paragraphen sei eine Semiwertung V gegeben.

Für einen Term p vom Typ 1 bezeichne $\bar{p}$ die Äquivalenzklasse von p bezüglich der Relation $\sim$ aus 8.5. (Die Bezeichnung $\bar{p}$ aus den §§ 2 und 3 wird nie mehr verwendet.)

J bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen zu der Relation $\sim$ in 8.5, also $J := \{ \bar{p} ; p \text{ ist Term vom Typ 1} \}$.

Durch die gegebene Semiwertung sind $\bar{p}$ und J bestimmt.

10.1. Induktive Definition der Menge C^τ der V-Komplexe vom Typ τ in Anlehnung an den Typengrad von τ :

10.1.1. $\tau = 0$:

Ist $p \ w$, so ist $[p \ w]$ aus C^0 . Ist $p \ f$, so ist $[p \ f]$ aus C^0 . Ist $p \ u$, so sind $[p \ w]$ und $[p \ f]$ aus C^0 . Andere Elemente als die genannten enthalte C^0 nicht.

10.1.2. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0 \ (n > 0)$:

$[p^\tau \langle M_w \ M_f \ M_0 \rangle]$ ist Element von C^τ genau dann, wenn gilt:

10.1.2.1. M_w , M_f und M_0 sind paarweise disjunkte Mengen, deren Vereinigung die Menge $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$ ist.

10.1.2.2. Sind jeweils für $i = 1 \dots n$ $c_i = [t_i \ N_i] \in C^{\tau_i}$,

a) und gibt es $c'_i = [t'_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt'_1 \dots t'_n \ w$, und gibt es keine $c''_i = [t''_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt''_1 \dots t''_n \ f$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle \in M_w$.

b) und gibt es $c''_i = [t''_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt''_1 \dots t''_n \ f$, und gibt es keine $c'_i = [t'_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt'_1 \dots t'_n \ w$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle \in M_f$.

c) und gibt es sowohl $c'_i = [t'_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt'_1 \dots t'_n \ w$, als auch $c''_i = [t''_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt''_1 \dots t''_n \ f$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle \in M_0$.

d) und ist für alle $c'''_i = [t'''_i \ N_i] \in C^{\tau_i} : pt'''_1 \dots t'''_n \ u$, so sind diese Tupel $\langle c'''_1 \dots c'''_n \rangle$ entweder alle in M_w oder alle in M_f .

10.1.3. $\tau = 1$:

C^1 enthält zu jedem Term p^1 das eine Element $[p \ \bar{p}]$.

10.1.4. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1 \ (n > 0)$:

$[p^\tau (M_j ; j \in J)]$ ist aus C^τ genau dann, wenn gilt:

10.1.4.1. M_j ist Teilmenge von $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$ für alle j .

10.1.4.2. Hat für $i = 1 \dots n$ $c_i \in C^{\tau_i}$ die Gestalt $[t_i^{\tau_i} \ N_i]$, so gilt $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_j genau dann, wenn die Mengen $\overline{pt_1 \dots t_n}$ und j übereinstimmen.

Mitteilungszeichen: c^τ , d^τ , e^τ , f^τ für V-Komplexe vom Typ τ . Der obere Typ τ kann bei diesen Zeichen wegbleiben.

Bemerkungen zu dieser Definition und Vereinbarungen:

Sind $c = [p \ M]$ und $d = [q \ N]$ Komplexe vom Typ τ , so ist unter $M=N$ (die zweiten Komponenten dieser beiden Komplexe stimmen überein) zu verstehen:

- $\tau = 0$: M und N sind derselbe Wahrheitswert w oder f .
- $\tau = \tau_1 \dots \tau_n^0$ ($n > 0$), $M = \langle M_w \ M_f \ M_0 \rangle$, $N = \langle N_w \ N_f \ N_0 \rangle$: M_j und N_j sind dieselbe Teilmenge von $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$, für $j = w, f, 0$.
- $\tau = 1$: M und N sind dieselbe Menge von Termen vom Typ 1.
- $\tau = \tau_1 \dots \tau_n^1$ ($n > 0$), $M = \langle M_j; j \in J \rangle$, $N = \langle N_j; j \in J \rangle$: M_j und N_j sind dieselbe Teilmenge von $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$ für alle $j \in J$.

Wird (wie schon in 10.1.2.2) bei der Mitteilung zweier Komplexe $c' = [t' \ N]$, $c'' = [t'' \ N]$ vom Typ τ für die zweiten Komponenten dasselbe Zeichen N verwendet, so ist zu lesen, daß die zweiten Komponenten von c' und c'' übereinstimmen.

Teilt p einen Term vom Typ τ mit, so bezeichnen p' , p'' , p''' ebenfalls Terme vom Typ τ . Darüber hinaus braucht zwischen den Termen p , p' , p'' und p''' keinerlei Zusammenhang zu bestehen. (Das ist in 10.1.2.2 zu beachten.)

Ist $[p \ N]$ als Komplex vom Typ τ vorausgesetzt und wird dann die Schreibweise $[q \ N]$ verwendet (wo q ein Mitteilungszeichen für Terme ist), so ist auch unter $[q \ N]$ ein Komplex vom Typ τ zu verstehen, mit derselben 2ten Komponente wie $[p \ N]$. Der Typ von Komplexen wird manchmal nicht angegeben, wenn er aus dem Zusammenhang erschlossen werden kann.

10.2. Bemerkung:

Zu jedem Term p^τ gibt es ein Element $[p^\tau \ M]$ von C^τ .

10.3. Definition:

$p^\tau \sim q^\tau$ bedeute: Es gibt Komplexe der Gestalt $[p^\tau \ N]$, $[q^\tau \ N]$ aus C^τ , deren zweite Komponenten übereinstimmen.

(Die Relation $\sim$ ist trivialerweise symmetrisch.)

10.4. Lemma:

10.4.1. $p \sim^0 q$ ist äquivalent zu der Aussage: Es gilt weder $(p \wedge w \text{ und } q \wedge f)$ noch $(p \wedge f \text{ und } q \wedge w)$.

10.4.2. $p \sim^1 q$ ist äquivalent zu der Aussage " $E_1 p, q$ ist nicht f ", also auch zu $p \sim q$ im Sinn von 8.5.

10.4.3. Ist t für $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n > 0$) ein Term vom Typ τ , und ist $c_k = [q_k P_k]$ aus C^{τ_k} für $k = 1 \dots n$, so gilt trivial genau eine der folgenden vier Aussagen:

- Es gibt $[q'_1 P_1] \dots [q'_n P_n]$, so daß $tq'_1 \dots q'_n w$, es gibt aber keine $[q''_1 P_1] \dots [q''_n P_n]$, so daß $tq''_1 \dots q''_n f$.
- Es gibt $[q''_1 P_1] \dots [q''_n P_n]$, so daß $tq''_1 \dots q''_n f$, es gibt aber keine $[q'_1 P_1] \dots [q'_n P_n]$, so daß $tq'_1 \dots q'_n w$.
- Es gibt $[q'_1 P_1] \dots [q'_n P_n]$, so daß $tq'_1 \dots q'_n w$, und es gibt auch $[q''_1 P_1] \dots [q''_n P_n]$, so daß $tq''_1 \dots q''_n f$.
- Für alle $[q'_1 P_1] \dots [q'_n P_n]$ ist $tq'_1 \dots q'_n u$.

Wir sagen dann, der betreffende von diesen 4 Fällen gilt für das Tupel $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ im Bezug auf t .

Sind nun s und t Terme vom Typ τ , und

- gilt für kein Tupel im Bezug auf s oder t der Fall c, und
 - gilt für kein Tupel im Bezug auf s der Fall a und im Bezug auf t der Fall b, und
 - gilt für kein Tupel im Bezug auf s der Fall b und im Bezug auf t der Fall a,
- so gilt $s \sim^\tau t$.

10.4.4. Ist $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$ ($n > 0$), so gilt $s \sim^\tau t$ genau dann, wenn $\overline{sq_1 \dots q_n} = \overline{tq_1 \dots q_n}$ für alle $q_1^{\tau_1} \dots q_n^{\tau_n}$.

Zu 10.4.1. Ist (ohne Einschränkung) $p \wedge w$ und $q \wedge f$, so sind nur $[p \wedge w]$ und $[q \wedge f]$ aus C^0 , also gilt nicht $p \sim q$.

Gilt andererseits keiner der in der folgenden Tabelle

Wert von p : w w w f f f u u u

Wert von q : w f u w f u w f u

N : w - w - f f w f f

mit - bezeichneten Fälle, so sind für das angegebene N $[p N]$ und $[q N]$ in den übrigen Fällen aus C^0 .

10.4.2 ist klar, da nur $[p \bar{p}]$ und $[q \bar{q}]$ aus C^1 sind und $\bar{p} = \bar{q}$ nach Definition zu " $E_1 pq$ nicht f " äquivalent ist.

Zu 10.4.3 sei $N := \langle M, P, \text{leere Menge} \rangle$, wobei gilt:

M ist die Menge der Tupel $\langle [q_1 P_1] \dots [q_n P_n] \rangle \in C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$, für die es $[q'_1 P_1] \dots [q'_n P_n]$ gibt, so daß $sq'_1 \dots q'_n w$ oder $tq'_1 \dots q'_n w$; P ist das Komplement von M in $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$.

Für ein Tupel $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ gilt im Bezug auf s und im Bezug auf t je einer der oben genannten Fälle a bis d. Die denkbaren Kombinationen sind in der Tabelle aufgeführt:

Gilt im Bezug auf s :	a a a a	b b b b	c c c c	d d d d
und im Bezug auf t :	a b c d	a b c d	a b c d	a b c d

so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus $M - - M - P - P - - - M P - P$,

und die mit - bezeichneten Kombinationen treten wegen der Voraussetzungen 1) 2) 3) nicht auf.

Anhand der Tabelle zeigt man nun, daß $[s N]$ und $[t N]$ aus C^{τ} sind, indem man die möglichen Fallkombinationen auf die Erfordernisse von 10.1.2.2 hin prüft. Daraus folgt $s \sim t$.

Zu 10.4.4. Nach Definition gibt es zu s und t je genau ein Element $[s (M_j; j \in J)]$, $[t (N_j; j \in J)]$ von C^{τ} , u. z. gilt für alle j : Ein Tupel $\langle [q_1 P_1] \dots [q_n P_n] \rangle \in C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$ ist genau dann ein Element von M_j bzw. N_j , wenn

$\overline{sq_1 \dots q_n} = j$ bzw. $\overline{tq_1 \dots q_n} = j$ gilt. Die Gleichheit von M_j und N_j für alle $j \in J$ ist also äquivalent zu der Aussage $\overline{sq_1 \dots q_n} = \overline{tq_1 \dots q_n}$ für alle $q_1 \dots q_n$. Damit hat man beide Richtungen der in 10.4.4 behaupteten Äquivalenz.

10.5. Hauptlemma:

t sei ein Term vom Typ 0 oder 1.

Sind $x_1^{\tau_1} \dots x_m^{\tau_m}$ ($m > 0$) paarweise verschiedene Variablen, und sind für $i = 1 \dots m$ a_i und b_i Terme vom Typ τ_i , so gilt:
 Aus $a_i \sim b_i$ ($i = 1 \dots m$) folgt $t \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_m \\ a_1 \dots a_m \end{smallmatrix} \right) \sim t \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_m \\ b_1 \dots b_m \end{smallmatrix} \right)$.

Sei $p^a := p \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_m \\ a_1 \dots a_m \end{smallmatrix} \right)$, $p^b := p \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_m \\ b_1 \dots b_m \end{smallmatrix} \right)$, wenn p einen beliebigen Term (der nicht vom Typ 0 oder 1 sein muß) mitteilt. Unter den Voraussetzungen des Lemmas wird definiert:

$$M(t, x_1 \dots x_m) := \text{Max}(g_{\tau_1} \dots g_{\tau_m})$$

$$G(t, x_1 \dots x_m) := \text{Grad } t$$

Der Beweis geschieht durch Induktion nach der Ordinalzahl

$$\omega \cdot M(t, x_1 \dots x_m) + G(t, x_1 \dots x_m),$$

und zwar indirekt, wir leiten also aus der Annahme

- Für $i = 1 \dots m$ gibt es $[a_i \ M_i]$ und $[b_i \ M_i]$ aus C^{τ_i} und
 - $t^a w$ und $t^b f$, wenn t den Typ 0 hat,
 - $\text{Et}^{a_t b} f$, wenn t vom Typ 1 ist,

(Diese Annahme ist äquivalent zu der Negation des Lemmas, wenn man 10.4.1 und 10.4.2 sowie die Symmetrie beachtet) einen Widerspruch ab. Man beachte, daß bei allen Beweisschritten $[a_i \ M_i]$ und $[b_i \ M_i]$ aus C^{τ_i} vorausgesetzt sind.

10.5.1. t sei x_j^0 , j aus $1 \dots m$. Wäre $t^a w$ und $t^b f$, also $a_j w$ und $b_j f$, so wäre nach 10.4.1 nicht $a_j \sim b_j$.

10.5.2. t sei x_j^1 , j aus $1 \dots m$. Wäre $E_1 t^{a_t b} f$, also $E_1 a_j b_j f$, so wäre nach 10.4.2 nicht $a_j \sim b_j$.

Zwischenbemerkung:

Betrachtet man beim Beweis $t = x_j^{6_1 \dots 6_n \gamma} p_1 \dots p_n$ ($n > 0$, j aus $1 \dots m$), hat man also nach Induktionsvoraussetzung die Behauptung für jede Ordinalzahl, die kleiner ist als $\omega \cdot M(x_j p_1 \dots p_n, x_1 \dots x_m) + G(x_j p_1 \dots p_n)$, so ist $p_i^a \sim p_i^b$ für alle $i = 1 \dots n$.

Beweis der Zwischenbemerkung:

Für $\delta_i = 0$ benutzen wir 10.4.1. Da

$M(p_i, x_1 \dots x_m) = M(t, x_1 \dots x_m)$ und $Gp_i < G(xp_1 \dots p_n)$, gilt nicht $p_i^a w$ und $p_i^b f$, und auch nicht $p_i^a f$ und $p_i^b w$.

Für $\delta_i = 1$ wird 10.4.2 benutzt. $E_1 p_i^a p_i^b$ ist nicht f , da

$M(p_i, x_1 \dots x_m) = M(t, x_1 \dots x_m)$ und $Gp_i < G(xp_1 \dots p_n)$.

Ist $\delta_i = \xi_1 \dots \xi_r 0$ ($r > 0$), so zeigen wir die Voraussetzung

1) 2) 3) von 10.4.3, im Bezug auf die Terme p_i^a und p_i^b , die eine hinreichende Bedingung für $p_i \sim p_i$ darstellt.

1) Steht p für p_i^a oder p_i^b , so tritt Fall c im Bezug auf p nicht auf. Sonst gäbe es nämlich $[q_k' p_k]$ und $[q_k'' p_k]$ aus C^{q_k} mit $p q_1' \dots q_r' w$ und $p q_1'' \dots q_r'' f$, es würde also nicht gelten $p q_1' \dots q_r' \sim p q_1'' \dots q_r''$. Sind aber $z_1 \dots z_r$ paarweise verschieden und kommen diese Variablen nicht in p vor, so ist

$$M(p z_1^{\xi_1} \dots z_r^{\xi_r}, z_1 \dots z_r) = \text{Max}(g \xi_1 \dots g \xi_r) <$$

$$< \text{Max}(g \xi_{r+1} \dots g \xi_r + 1, g 0) = g(\xi_1 \dots \xi_r 0) = g \delta_i <$$

$$< g(\delta_1 \dots \delta_n) = g \tau_j \leq \text{Max}(g \tau_1 \dots g \tau_m) = M(t, x_1 \dots x_m).$$

Von den Voraussetzungen 2) und 3) braucht wegen der Symmetrie nur eine gezeigt zu werden. Träfe etwa im Bezug auf p_i^a der Fall a und im Bezug auf p_i^b der Fall b zu, so gäbe es insbesondere $[q_k' p_k]$ und $[q_k'' p_k]$ aus C^{q_k} , so daß $p_i^a q_1' \dots q_r' w$ und $p_i^b q_1'' \dots q_r'' f$, $p_i^a q_1' \dots q_r' \sim p_i^b q_1'' \dots q_r''$ würde also nicht gelten. Wählt man jedoch $z_1 \dots z_r$, die paarweise verschieden sind und nicht in p_i vorkommen, und beachtet man, daß $\tau_j = \delta_1 \dots \delta_n$ und $\delta_i = \xi_1 \dots \xi_r 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} M(p_i z_1^{\xi_1} \dots z_r^{\xi_r}, x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_r) &= \\ &= \text{Max}(g \tau_1 \dots g \tau_m, g \xi_1 \dots g \xi_r) \\ &= \text{Max}(g \tau_1 \dots g \tau_m) = M(t, x_1 \dots x_m) \end{aligned}$$

$$G(p_i z_1 \dots z_r) < G(x p_1 \dots p_n) = G t$$

Für $\delta_i = \xi_1 \dots \xi_r 1$ ($r > 0$) wenden wir 10.4.4 an, indem wir zeigen: Für alle Terme $q_1 \dots q_r$ ist $\overline{p_i^a q_1 \dots q_r} = \overline{p_i^b q_1 \dots q_r}$, also $E_1(p_i^a q_1 \dots q_r)(p_i^b q_1 \dots q_r)$ nicht f .

Wäre jedoch $E_1(p_1^a q_1 \dots q_r)(p_1^b q_1 \dots q_r) f$ für gewisse $q_1 \dots q_r$, so wäre das ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung: Es gäbe $[a_i M_i]$, $[b_i M_i]$ aus C^{T_i} ($i = 1 \dots m$) und $[q_k P_k]$, $[q_k P_k]$ aus C^{S_k} ($k = 1 \dots r$), und $p_1^a q_1 \dots q_r \sim p_1^b q_1 \dots q_r$ würde nicht gelten. Man hat jedoch analog wie soeben im Fall $q_1 \dots q_r 0$ (wenn $z_1 \dots z_r$ paarweise verschieden sind und nicht in p_i vorkommen):

$$M(p_1 z_1^{S_1} \dots z_r^{S_r}, x_1 \dots x_m, z_1, \dots, z_r) = M(t, x_1 \dots x_m)$$

$$G(p_1 z_1 \dots z_r) < G(x_j p_1 \dots p_n) = Gt$$

Damit ist die Zwischenbemerkung vollständig bewiesen. Wir fahren im Beweis des Hauptlemmas fort:

10.5.3. t sei $\delta_1 \dots \delta_n^0 p_1 \dots p_n, n > 0, j$ aus $1 \dots m$.

Sei $t^a w$ und $t^b f$, also $a_j p_1^a \dots p_n^a w$ und $b_j p_1^b \dots p_n^b f$. Nach Voraussetzung gibt es $[a_j \langle M_w M_f M_0 \rangle]$, $[b_j \langle M_w M_f M_0 \rangle]$ aus $C^{\delta_1 \dots \delta_n^0}$. Wegen der Zwischenbemerkung gibt es $[p_i^a N_i]$ und $[p_i^b N_i]$ aus C^{δ_i} , für $i = 1 \dots n$. Wir schreiben $c_i := [p_i^a N_i]$ für $i = 1 \dots n$. Dann gilt wegen 10.1.2.2:

(a) $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ ist aus M_w oder aus M_0 .

Denn $[a_j \langle M_w M_f M_0 \rangle]$ ist aus $C^{\delta_1 \dots \delta_n^0}$. Zu $c_i = [p_i^a N_i]$ hat man $c_i' = [p_i^a N_i]$, so daß $a_j p_1^a \dots p_n^a w$.

Gibt es nun keine $c_i'' = [q_i N_i] : a_j q_1 \dots q_n f$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_w . Gibt es jedoch $c_i'' = [q_i N_i] : a_j q_1 \dots q_n f$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_0 .

(b) $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ ist aus M_f oder aus M_0 .

Denn $[b_j \langle M_w M_f M_0 \rangle]$ ist aus $C^{\delta_1 \dots \delta_n^0}$. Zu $c_i = [p_i^a N_i]$ hat man $c_i'' = [p_i^b N_i]$, so daß $b_j p_1^b \dots p_n^b f$.

Gibt es nun keine $c_i' = [q_i N_i] : b_j q_1 \dots q_n w$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_f . Gibt es jedoch $c_i' = [q_i N_i] : b_j q_1 \dots q_n w$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_0 .

Da M_w und M_f disjunkt sind, ist nach (a) und (b) $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_0 . Daraus folgt aber:

(c) Es gibt $[p_i^a N_i]$, $[q_i N_i] : a_j p_1^a \dots p_n^a w, a_j q_1 \dots q_n f$.

Denn es ist $[a_j \langle M_w M_f M_o \rangle]$ aus $C^{6_1 \dots 6_n 0}$, und zu $c_i = [p_i^a N_i]$ gibt es $c'_i = [p_i^a N_i] : a_j p_1^a \dots p_n^a$ w. Gäbe es nun keine $c''_i = [q_i N_i] : a_j q_1 \dots q_n$ f, so wäre $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_w .

Die Folgerung (c) widerspricht jedoch der Induktionsvoraussetzung. Sind $z_1 \dots z_n$ paarweise verschieden und kommen sie nicht in a_j vor, gilt nämlich:

$$M(a_j z_1^{6_1} \dots z_n^{6_n}, z_1 \dots z_n) = \text{Max}(g^{6_1} \dots g^{6_n}) < g^{(6_1 \dots 6_n 0)} = \\ = g^{t_j} \leq \text{Max}(g^{t_1} \dots g^{t_m}) = M(t, x_1 \dots x_m).$$

10.5.4. t sei $x_j^{6_1 \dots 6_n 1} p_1 \dots p_n$, $n > 0$, j aus 1...m:

Sei $E_1 t^{a,b}$ f, also $E_1 (a_j p_1^a \dots p_n^a) (b_j p_1^b \dots p_n^b)$ f. Da nach Voraussetzung $a_j \sim b_j$, folgt mit 10.4.4 $\overline{a_j s_1 \dots s_n} = \overline{b_j s_1 \dots s_n}$ für alle $s_1 \dots s_n$. Aus $E_1 (a_j p_1^a \dots p_n^a) (b_j p_1^b \dots p_n^b)$ f folgt

$\overline{a_j p_1^a \dots p_n^a} \neq \overline{b_j p_1^b \dots p_n^b}$. Da insbesondere $\overline{a_j p_1^a \dots p_n^a} = \overline{b_j p_1^a \dots p_n^a}$, folgt $\overline{b_j p_1^a \dots p_n^a} \neq \overline{b_j p_1^b \dots p_n^b}$, und daraus hat man:

$E_1 (b_j p_1^a \dots p_n^a) (b_j p_1^b \dots p_n^b)$ f, und nach der Zwischenbemerkung gibt es $[p_i^a N_i]$ und $[p_i^b N_i]$ aus C^{6_1} . Das ist jedoch ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung, denn wie in 10.5.3 ist $M(b_j z_1^{6_1} \dots z_n^{6_n}, z_1 \dots z_n) < M(t, x_1 \dots x_m)$.

10.5.5. t sei y^0 , y sei kein x_j . y ist nicht w und f.

10.5.6. t sei y^1 , y sei kein x_j . $E_1 y y$ ist nicht f.

Nachdem mit 10.5.1 bis 10.5.4 alle Fälle erledigt sind, bei denen t mit einer Variablen $x_1 \dots x_m$ beginnt, wird bei den übrigen Fällen die Induktion nur mehr mit dem Gradanteil von $\omega \cdot M(t, x_1 \dots x_m) + Gt$ geführt, die Variablen $x_1 \dots x_m$ können also bei diesen Beweisschritten beibehalten werden. Es wird gezeigt: Ist $t^{a,b}$ nicht gültig, so gibt es einen Term s vom Typ 0 oder 1, der einen kleineren Grad als t hat und für den $s^a \sim s^b$ nicht gültig ist. Diese Beweisschritte verlaufen völlig zwangsläufig, weil immer nur eine Eigenschaft der Semiwertung anwendbar ist.

10.5.7. t sei $y^{6_1 \dots 6_n \gamma} p_1 \dots p_n$ ($n > 0$), y sei kein x_i .

Aus $E_1(y p_1^a \dots p_n^a)(y p_1^b \dots p_n^b)$ f (für $\gamma = 1$) bzw. $y p_1^a \dots p_n^a$ w und $y p_1^b \dots p_n^b$ f (für $\gamma = 0$) folgt mit 8.1.7 bzw. 8.1.6 $E_{6_i} p_i^b p_i^a$ f für ein i aus $1 \dots n$. Daraus folgt:

10.5.7.1. für $6_i = 0$: p_i^b w und p_i^a f, oder p_i^a w und p_i^b f, also ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung, $G p_i < G t$.

10.5.7.2. für $6_i = 1$: $E_1 p_i^b p_i^a$ f. Es ist $G p_i < G t$.

10.5.7.3. für $6_i = \xi_1 \dots \xi_r 0$ ($r > 0$) $E_0(p_i^b z_1 \dots z_r)(p_i^a z_1 \dots z_r)$ f für gewisse Variablen $z_1 \dots z_r$ (wegen 8.1.4), daraus hat man (wegen der Symmetrie ohne Einschränkung) $p_i^b z_1 \dots z_r$ w und $p_i^a z_1 \dots z_r$ f, also einen Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung, da $G(p_i z_1 \dots z_r) < G t$.

10.5.7.4. für $6_i = \xi_1 \dots \xi_r 1$ ($r > 0$) entsprechend $E_1(p_i^b z_1 \dots z_r)(p_i^a z_1 \dots z_r)$ f für gewisse $z_1 \dots z_r$, und es gilt: $G(p_i z_1 \dots z_r) < G t$.

Ebenso trivial wie 10.5.7 zeigen sich die übrigen Fälle: t der Gestalt $N p, A p q, E p q, k p_1 \dots p_n$.

§ 11. V-Komplexe

In diesem Paragraphen sei eine Semiwertung V gegeben.

Die Definition der V-Komplexe läßt sich aufgrund von 10.5 für die Typen der Gestalt $\tau_1 \dots \tau_n 0$ vereinfachen:

11.1. Induktive Definition der Menge C^τ der V-Komplexe vom Typ τ :

11.1.1. $\tau = 0$ (wie in 10.1.1):

Ist p w, so ist $[p w]$ aus C^0 .

Ist p f, so ist $[p f]$ aus C^0 .

Ist p u, so sind $[p w]$ und $[p f]$ aus C^0 .

11.1.2. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n > 0$):

$[p^\tau M]$ ist aus C^τ genau dann, wenn gilt:

11.1.2.1. M ist Teilmenge von $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$.

11.1.2.2. Sind (für $i = 1 \dots n$) $c_i = [t_i M_i]$ aus C^{τ_i} , und

a) gibt es $c'_i = [t'_i M_i] : pt'_1 \dots t'_n w$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle \in M$.

b) gibt es $c'_i = [t'_i M_i] : pt'_1 \dots t'_n f$, so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle \notin M$.

c) ist für alle $c'_i = [t'_i M_i] : pt'_1 \dots t'_n u$, und hat man für $i = 1 \dots n$ $c'_i = [t'_i M_i]$ sowie $c''_i = [t''_i M_i]$ aus C^{τ_i} , so ist $\langle c'_1 \dots c'_n \rangle$ aus M genau dann, wenn $\langle c''_1 \dots c''_n \rangle$ aus M .

11.1.3. $\tau = 1$ (wie 10.1.3):

Zu jedem Term p vom Typ 1 ist $[p \bar{p}]$ aus C^1 .

11.1.4. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$ ($n > 0$) (wie in 10.1.4):

$[p^\tau (M_j ; j \in J)]$ ist aus C^τ genau dann, wenn gilt:

11.1.4.1. M_j ist Teilmenge von $C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}$ für alle $j \in J$.

11.1.4.2. Ist für $i = 1 \dots n$ $c_i = [t_i N_i]$ aus C^{τ_i} , so ist $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M_j genau dann, wenn $\overline{pt_1 \dots t_n} = j$.

11.2. Durch 10.1 und 11.1 wird dieselbe Menge C^τ definiert.

Für 10.1.2.2 gilt: $\langle [t_1 M_1] \dots [t_n M_n] \rangle$ ist aus M_0 genau dann, wenn es für $i = 1 \dots n$ $[t'_i M_i]$ und $[t''_i M_i]$ gibt, so daß $pt'_1 \dots t'_n w$ und $pt''_1 \dots t''_n f$. Da dies nach 10.5 nicht vorkommen kann, definiert 10.1.2 nur V-Komplexe der Art

$[p^\tau \langle M, \text{Komplement von } M \text{ in } C^{\tau_1} \times \dots \times C^{\tau_n}, \text{leere Menge} \rangle]$,

und dann ist 10.1.2 zu 11.1.2 äquivalent, wenn man

$\langle c_1 \dots c_n \rangle \in M_w$ bzw. $\in M_f$ in $\langle c_1 \dots c_n \rangle$ aus M bzw. nicht aus M übersetzt und überdies beachtet:

Die Bedingung in 11.1.2.2 unter a)

es gibt $[t'_i M_i] : pt'_1 \dots t'_n w$

ist wegen 10.5 äquivalent zu der Bedingung in 10.1.2.2 a)

es gibt $[t'_i M_i] : pt'_1 \dots t'_n w$ und keine $[t''_i M_i] : pt''_1 \dots t''_n f$.

Und dasselbe gilt, wenn man überall w und f vertauscht.

11.3. Hauptlemma:

11.3.1. Es sei $[p^\tau M]$ aus $C^{\tau_1 \dots \tau_n 0}$.

Sind dann für $i = 1 \dots n$ $c'_i = [t'_i N_i]$, $c''_i = [t''_i N_i]$ aus $C^{\tau_i 1}$, so gilt: $\langle c'_1 \dots c'_n \rangle \in M$ genau dann, wenn $\langle c''_1 \dots c''_n \rangle \in M$.

11.3.2. Es sei $[p^\tau (M_j ; j \in J)]$ aus $C^{\tau_1 \dots \tau_n 1}$.

Sind $c'_i = [t'_i N_i]$, $c''_i = [t''_i N_i] \in C^{\tau_i 1}$ ($i = 1 \dots n$), so gilt für alle $j \in J$: $\langle c'_1 \dots c'_n \rangle \in M_j$ genau dann, wenn $\langle c''_1 \dots c''_n \rangle \in M_j$.

Zu 11.3.1. Die Bedingungen von 11.1.2.2 gelten für alle Tupel $\langle [t_1 N_1] \dots [t_n N_n] \rangle$ mit gleichen 2ten Komponenten N_i .

Zu 11.3.2. Für alle $j \in J$ ist $\langle c'_1 \dots c'_n \rangle \in M_j$ genau dann, wenn $\overline{pt'_1 \dots t'_n} = j$, $\langle c''_1 \dots c''_n \rangle \in M_j$ genau dann, wenn $\overline{pt''_1 \dots t''_n} = j$. Zu zeigen ist also $\overline{pt'_1 \dots t'_n} = \overline{pt''_1 \dots t''_n}$. Dies gilt aber, da nach 10.5 $E_1(pt'_1 \dots t'_n)(pt''_1 \dots t''_n)$ nicht f sein kann.

§ 12. V-Korrespondenzen

In diesem Paragraphen sei eine Semiwertung V gegeben.

12.1. Induktive Definition der Länge lp für jeden Term p:

12.1.1. $lp := 1$, für p der Gestalt x^τ , N, A, E_τ , $K_{6\tau}$.

12.1.2. $ls_{96\tau} := 3$.

12.1.3. $l(pq) := lp + lq$.

12.2. Bemerkung: $l(pq) > lp$ und lq . $ls_{96\tau} > l(y^{98} z^9)$.

12.3. Eine V-Korrespondenz Φ ist eine Zuordnung eines Elements $\Phi x^\tau \in C^\tau$ zu jeder Variablen x^τ , für alle Typen τ .

Wir schreiben Φx^τ in der Form $[\phi_1(x^\tau), \phi_2(x^\tau)]$.

12.4. Für eine V-Korrespondenz Φ , eine Variable x vom Typ τ und c aus C^τ definieren wir die V-Korrespondenz $\phi(\frac{x}{c})$:

- $\phi(\frac{x}{c})y := \phi y$, wenn y von x verschieden ist.
- $\phi(\frac{x}{c})x := c$.

12.5. Induktive Definition von ϕ_p für jeden Term p und jede V-Korrespondenz ϕ in Anlehnung an die Länge lp von p :
(Wir schreiben ϕ_p in der Form $[\phi_{1p} \phi_{2p}]$. Ist ϕ_{2p} eine Familie $(M_j ; j \in J)$ von Mengen, so schreiben wir ϕ_{2p}^j für M_j).

12.5.1. ϕ_{x^τ} ist durch die Korrespondenz gegeben.

12.5.2. $\phi_N := [N \{c ; c \in C^0 \text{ und } c = [t f]\}]$.

12.5.3. $\phi_A := [A \{\langle c^0 d^0 \rangle ; c = [s M], d = [t N], M = w \text{ oder } N = w\}]$.

12.5.4. $\phi_{E_\tau} := [E_\tau \{\langle c^\tau d^\tau \rangle ; c = [s M], d = [t N], \text{ und } M = N\}]$.

12.5.5. $\phi_1(K_{6\tau}) := K_{6\tau}$ und $\phi_2(K_{6\tau})$ möge sein:

für $\tau = 0$: $\{\langle c^0 d^6 \rangle ; c = [t w]\}$,

für $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n > 0$):

$\{\langle c^\tau d^6 e_1^{\tau_1} \dots e_n^{\tau_n} \rangle ; c = [t M] \text{ und } \langle e_1 \dots e_n \rangle \in M\}$,

für $\tau = 1$: $\{\langle c^1 d^6 \rangle ; c = [t j]\} ; j \in J$,

für $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$ ($n > 0$):

$\{\langle c^\tau d^6 e_1^{\tau_1} \dots e_n^{\tau_n} \rangle ; c = [t (M_j ; j \in J)], \langle e_1 \dots e_n \rangle \in M_j\} ; j \in J$.

12.5.6. $\phi_1(S_{\wp 6\tau}) := S_{\wp 6\tau}$ und $\phi_2(S_{\wp 6\tau})$ möge sein:

für $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n \geq 0$): $\{\langle c^{(\wp 6\tau)} d^{\wp 6} e^{\wp} f_1^{\tau_1} \dots f_n^{\tau_n} \rangle ;$

$c = [t M] \text{ und } \langle e, \Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e}) y^{\wp 6} z^{\wp}, f_1 \dots f_n \rangle \in M\}$,

für $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$ ($n \geq 0$): $\{\langle c^{(\wp 6\tau)} d^{\wp 6} e^{\wp} f_1^{\tau_1} \dots f_n^{\tau_n} \rangle ;$

$c = [t (M_j ; j \in J)] \text{ und } \langle e, \Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e}) y^{\wp 6} z^{\wp}, f_1 \dots f_n \rangle \in M_j\} ; j \in J$.

Dabei sei Ψ eine beliebige, fest gewählte V-Korrespondenz und $y^{\wp 6}$ und $z^{\wp}$ seien fest gewählte Variablen.

12.5.7. $\phi_1(p^{\wp \tau} q^6) := (\phi_1 p^{\wp \tau})(\phi_1 q^6)$. $\phi_2(p^{\wp \tau} q^6)$ wird, nach Fällen unterschieden, wie folgt definiert:

12.5.7.1. $\phi_2(p^{60}q^6)$ sei: w, wenn $\phi_q \in \phi_{2p}$; f, sonst,
(unter der Voraussetzung, daß ϕ_{2p} eine Menge ist.)

12.5.7.2. $\phi_2(p^{61}q^6) := j$, wenn $\phi_q \in \phi_{jp}$.

(Diese knappe Formulierung ist unter der Voraussetzung zu verstehen, daß $\phi_q \in C^6$ und $\phi_p \in C^{61}$ gilt. Dann ist gemäß 11.1.4 C^6 die disjunkte Vereinigung der Mengenfamilie $(\phi_{jp}; j \in J)$. Da $\phi_q \in C^6$, gibt es also genau ein j , so daß $\phi_q \in \phi_{jp}$ gilt, und als dieses j wird $\phi_{2p}^{61}q^6$ definiert.)

12.5.7.3. $\phi_2(p^{6\tau_1 \dots \tau_n} q^6)$ für $n > 0$ sei die Menge
 $\{ \langle c_1 \dots c_n \rangle; c_i \in C^{\tau_i} \text{ und } \langle \phi_q, c_1 \dots c_n \rangle \in \phi_{2p} \}$,
(unter der Voraussetzung, daß ϕ_{2p} eine Menge ist.)

12.5.7.4. $\phi_2(p^{6\tau_1 \dots \tau_n} q^6)$ für $n > 0$ sei die Familie
 $\{ \langle c_1 \dots c_n \rangle; c_i \in C^{\tau_i}, \langle \phi_q, c_1 \dots c_n \rangle \in \phi_{jp} \}; j \in J$,
(unter der Voraussetzung, daß auch ϕ_{2p} eine Familie
 $(M_j; j \in J)$ von Mengen ist.)

Die Definition in den Fällen von 12.5.7 ist formal sinnlos, wenn die in Klammern genannten Voraussetzungen nicht gelten. Diese werden in 13.2 gezeigt.

§ 13. V-Korrespondenzen und die zugrundeliegende Semiwertung

In diesem Paragraphen sei eine Semiwertung V gegeben.

13.1. Lemma:

ϕ_{1p} hat die Gestalt $p \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \phi_{1x_1} & \dots & \phi_{1x_n} \end{pmatrix}$.

Dabei sollen $x_1 \dots x_n$ ($n \geq 0$) alle paarweise verschiedenen Variablen sein, die in dem Term p auftreten.

Insbesondere ist auch $\phi_1(p^\tau)$ ein Term vom Typ τ .

(Das hat man durch triviale Induktion nach 12.5.)

13.2. Hauptlemma:

Für jeden Term a vom Typ τ und jede V-Korrespondenz ϕ ist ϕa ein Element von C^τ .

13.3. Hilfsbehauptung:

Sind ϕ und ψ V-Korrespondenzen und gilt $\phi_2 x = \psi_2 x$ für jede Variable x , die in dem Term a auftritt, so gilt $\phi_2 a = \psi_2 a$.

13.2 und 13.3 werden simultan bewiesen durch Induktion nach 12.5:

(13.3 ist trivial, wenn a ein Grundterm ist.)

13.2.1. ϕx^τ ist nach Definition aus C^τ .

13.2.2. und 13.2.3. Die Fälle N und A sind trivial. Sie verlaufen ähnlich wie 13.2.4.1, der Fall E_0 .

13.2.4. a sei E_τ vom Typ $\tau\tau 0$:

Für $[E_\tau \{ \langle c^\tau d^\tau \rangle; c = [p \ M], d = [q \ N], M = N \}]$ aus $C^{\tau\tau 0}$ ist nach 11.1.2.2 zu zeigen:

Sind $c = [p \ M]$, $d = [q \ N] \in C^\tau$,

und gibt es $[p' \ M]$, $[q' \ N]: E_{p'q'} \left\{ \begin{matrix} w \\ f \end{matrix} \right\}$, so gilt $\left\{ \begin{matrix} M = N \\ M \neq N \end{matrix} \right\}$.

(Denn 11.1.2.2 c gilt in diesem Fall trivial.)

13.2.4.1. $\tau = 0$:

Ist $E_0 p'q'$ w/f, so sind p' und q' gleich/verschieden definiert. Da also nur $[p' \ (\text{Wert von } p')]$, $[q' \ (\text{Wert von } q')]$ aus C^0 sind und $[p' \ M]$, $[q' \ N] \in C^0$, folgt $M = N / M \neq N$.

13.2.4.2. $\tau = 1$:

Ist $E_1 p'q'$ w/f, so gilt $\overline{p'} = \overline{q'} / \overline{p'} \neq \overline{q'}$. Daraus hat man $M = N / M \neq N$, da nur $[p' \ \overline{p'}]$ und $[q' \ \overline{q'}]$ aus C^1 sind.

13.2.4.3. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n > 0$):

a) Ist $E_\tau p'q'$ w, so ist $E_0(p's_1 \dots s_n)(q's_1 \dots s_n)$ w, also $p's_1 \dots s_n$ und $q's_1 \dots s_n$ gleich definiert für alle Terme $s_1 \dots s_n$. Zu zeigen hat man $M = N$, d. h. für $d_i = [s_i \ P_i]$ aus C^{τ_i} gilt $\langle d_1 \dots d_n \rangle \in M$ genau dann, wenn $\langle d_1 \dots d_n \rangle \in N$.

Sei ohne Einschränkung $\langle d_1 \dots d_n \rangle \in M$. Da $[p' M] \in C^\tau$ ist, ist nach Definition dieses Komplexes $p's_1 \dots s_n$ w oder u. Da jedoch $p's_1 \dots s_n$ einen Wert hat (u. z. denselben wie $q's_1 \dots s_n$) folgt $p's_1 \dots s_n$ w und $q's_1 \dots s_n$ w. Da $[q' N] \in C^\tau$ ist, muß $\langle d_1 \dots d_n \rangle \in N$ gelten.

b) Ist $E_\tau p'q' f$, so ist $E_0(p'x_1 \dots x_n)(q'x_1 \dots x_n) f$, dann folgt (ohne Einschränkung) $p'x_1 \dots x_n$ w und $q'x_1 \dots x_n$ f für gewisse $x_1 \dots x_n$. Wählt man nun $d_i = [x_i \ P_i] \in C^{\tau_i}$, so ist (nach Definition von C^τ) das Tupel $\langle d_1 \dots d_n \rangle$ zwar aus M, aber nicht aus N, so daß $M \neq N$ gilt.

13.2.4.4. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n$ ($n > 0$):

a) Ist $E_\tau p'q' w$, so ist $E_1(p's_1 \dots s_n)(q's_1 \dots s_n) w$, also $\overline{p's_1 \dots s_n} = \overline{q's_1 \dots s_n}$ für alle $s_1 \dots s_n$. Für $M = N$ hat man zu zeigen: Ist $M = (M_j; j \in J)$, $N = (N_j; j \in J)$, so gilt für alle $d_i = [s_i \ P_i] \in C^{\tau_i}$ und alle j : $\langle d_1 \dots d_n \rangle \in M_j$ genau dann, wenn $\langle d_1 \dots d_n \rangle \in N_j$, also die Äquivalenz der beiden Aussagen:

$\overline{p's_1 \dots s_n} = j$, $\overline{q's_1 \dots s_n} = j$. Sie folgt aus der Gleichheit von $\overline{p's_1 \dots s_n}$ und $\overline{q's_1 \dots s_n}$.

b) Ist $E_\tau p'q' f$, so ist $E_1(p'x_1 \dots x_n)(q'x_1 \dots x_n) f$, also $\overline{p'x_1 \dots x_n} \neq \overline{q'x_1 \dots x_n}$ für gewisse $x_1 \dots x_n$. Für $j := \overline{p'x_1 \dots x_n}$ und d_i der Gestalt $[x_i \ P_i] \in C^{\tau_i}$ ist $\langle d_1 \dots d_n \rangle$ zwar aus M_j , nicht aber aus N_j , also $M_j \neq N_j$ und somit $M \neq N$.

13.2.5. a sei $K_{\delta\tau}$ vom Typ $\tau\delta\tau$:

13.2.5.1. $\tau = 0$:

$[K_{\delta 0} \{ \langle c^0 \ d^0 \rangle; c = [t \ w] \}] \in C^{060}$ ist zu zeigen.

Seien $[p \ M] \in C^0$, $[q \ N] \in C^6$. Gibt es $[p' \ M]$, $[q' \ N]$, so daß $Kp'q' w/f$, so ist auch $p' w/f$, also $M = w/f$, da $[p' \ M] \in C^0$.

13.2.5.2. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n$ ($n > 0$):

Für $[K_{\delta\tau} \{ \langle c^\tau \ d^6 \ e_1^{\tau_1} \dots e_n^{\tau_n} \rangle; c = [p \ M], \langle e_1 \dots e_n \rangle \in M \}] \in C^{\tau\delta\tau}$ ist nach 11.1.2.2 zu zeigen:

Hat man $c = [p \ M] \in C^\tau$, $d = [q \ N] \in C^6$, $e_i = [s_i \ M_i] \in C^{\tau_i}$ ($i = 1 \dots n$)

a) bzw. b) und gibt es $[p' \ M]$, $[q' \ N]$, $[s'_i \ M_i]$, so daß $Kp'q's'_1 \dots s'_n w/f$, so ist $\langle e_1 \dots e_n \rangle$ aus M/ nicht aus M.

Ist $[p M] \in C^T$, und sind $e_i' = [s_i' M_i]$, $e_i'' = [s_i'' M_i] \in C^{\tau_i}$ für $i = 1 \dots n$, so ist $\langle e_1' \dots e_n' \rangle \in M$ genau wenn $\langle e_1'' \dots e_n'' \rangle \in M$.

Zu a und b: Aus $Kp'q's_1' \dots s_n'$ w/f folgt $p's_1' \dots s_n'$ w/f, daraus folgt die Behauptung, da $[p' M] \in C^T$.

Die zweite Behauptung folgt sofort aus 11.3.1.

13.2.5.3. $\tau = 1$:

Für $[K_{61} (\langle c^1 d^6 \rangle; c = [t j]); j \in J]$ aus C^{161} ist gemäß 11.1.4.2 zu zeigen:

Ist $c = [p M]$, $d = [q N]$, so gilt $M = j$ genau dann, wenn $\overline{Kpq} = j$. Das bedeutet, da ceC^1 : $\overline{Kpq} = j$ genau wenn $\overline{p} = j$, also $\overline{Kpq} = \overline{p}$. Das folgt aus $E_1(Kpq)(Kpq) w$, $E_1(Kpq)p w$.

13.2.5.4. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$ ($n > 0$):

$[K_{6\tau} (\langle c^T d^6 e_1^{\tau_1} \dots e_n^{\tau_n} \rangle; c = [p (M_j; j \in J)], \langle e_1 \dots e_n \rangle \in M_j \}; j \in J]$ aus $C^{\tau_6\tau}$ ist nachzuweisen, also gemäß 11.1.4.2:

Für $c = [p (M_j; j \in J)] \in C^T$, $d = [q N] \in C^6$, $e_i = [s_i P_i] \in C^{\tau_i}$ gilt $\langle e_1 \dots e_n \rangle \in M_j$ genau dann, wenn $\overline{Kpqs_1 \dots s_n} = j$, das bedeutet, da ceC^T : $\overline{ps_1 \dots s_n} = j$ genau wenn $\overline{Kpqs_1 \dots s_n} = j$. Zu zeigen ist demnach $\overline{Kpqs_1 \dots s_n} = \overline{ps_1 \dots s_n}$, das folgt aus $E_1(Kpqs_1 \dots s_n)(Kpqs_1 \dots s_n) w$, $E_1(Kpqs_1 \dots s_n)(ps_1 \dots s_n) w$.

13.2.6. a sei $S_{\tau_6\tau}$ vom Typ $(\tau_6\tau)(\tau_6)\tau$:

13.2.6.1. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$ ($n \geq 0$):

Für $[S_{(\tau_6\tau)} \phi_2 S_{(\tau_6\tau)}]$ aus $C^{(\tau_6\tau)(\tau_6)\tau}$ ist nach 11.1.2.2 zu zeigen:

a) bzw. b) Sind $c = [p M] \in C^{\tau_6\tau}$, $d = [q N] \in C^{\tau_6}$, $e = [s P] \in C^{\tau}$ und $f_i = [t_i M_i] \in C^{\tau_i}$ ($i = 1 \dots n$), und gibt es $[p' M]$, $[q' N]$, $[s' P]$ und $[t_i' M_i]$: $Sp'q's't_1' \dots t_n' w$ bzw. f , so gilt $\langle e, \psi_d^{(y)}(e)yz, f_1 \dots f_n \rangle$ aus M bzw. nicht aus M .

c) Für $c' = [p' M]$, $c'' = [p'' M] \in C^{\tau_6\tau}$, $d' = [q' N]$, $d'' = [q'' N]$ aus C^{τ_6} , $e' = [s' P]$, $e'' = [s'' P] \in C^{\tau}$, $f_i' = [t_i' M_i]$, $f_i'' = [t_i'' M_i]$ aus C^{τ_i} sind die folgenden 2 Aussagen äquivalent:

$\langle e', \psi_d^{(y)}(e')yz, f_1' \dots f_n' \rangle \in M$, $\langle e'', \psi_d^{(y)}(e'')yz, f_1'' \dots f_n'' \rangle \in M$.

Vorbemerkung:

$$\Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})yz = [qs \ Q] \in C^6 \text{ und } \Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})yz = [q's' \ Q] \in C^6.$$

Denn beide sind aus C^6 wegen der Induktionsvoraussetzung an 13.2, die für jede Korrespondenz gilt. Wegen 13.1 sind die ersten Komponenten qs und $q's'$. Und daß die zweiten Komponenten Q übereinstimmen, folgt aus der Induktionsvoraussetzung an 13.3, denn es ist $\Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})_2 y = N = \Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})_2 y$, $\Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})_2 z = P = \Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})_2 z$.

Beweis der Aussagen a) und b):

Da $Sp'q's't'_1 \dots t'_n \text{ w/f}$, ist auch $p's'(q's')t'_1 \dots t'_n \text{ w/f}$.

Man hat also $[p' \ M] \text{ aus } C^{\delta^6 \tau_1 \dots \tau_n 0}$,
 $[s \ P] \in C^{\delta^6}$, $[qs \ Q] \in C^{\delta^6}$, $[t_1 \ M_1] \in C^{\tau_1} \dots [t_n \ M_n] \in C^{\tau_n}$, und es
 gibt $[s' \ P]$, $[q's' \ Q]$, $[t'_1 \ M_1] \dots [t'_n \ M_n]$, so daß
 $p's'(q's')t'_1 \dots t'_n \text{ w/f}$. Nach Definition von $[p' \ M]$ folgt
 die Behauptung.

Zu c): $\Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})yz = [q's' \ Q]$, $\Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})yz = [q''s'' \ Q]$, und
 beide sind aus C^6 (wie in der Vorbemerkung). Dann folgt die
 Behauptung mit 11.3.1, da $[p' \ M] \text{ aus } C^{\delta^6 \tau}$ ist.

13.2.6.2. $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$ ($n \geq 0$):

Für $[S \ \phi_2 S] \text{ aus } C^{\delta^6 \tau}(\delta^6) \delta^{\tau}$ ist nach 11.1.4.2 zu zeigen:

Für $c = [p \ (M_j; j \in J)] \in C^{\delta^6 \tau}$, $d = [q \ N] \in C^{\delta^6}$, $e = [s \ P] \in C^{\delta^6}$ und
 $f_i = [t_i \ N_i] \text{ aus } C^{\tau_i}$ sind äquivalent:

$$(a) \langle c, d, e, f_1 \dots f_n \rangle \text{ aus } \phi^J S.$$

$$(b) \overline{Spqst_1 \dots t_n} = j.$$

Nach 12.5.6 ist die Aussage (a) äquivalent zu

$$(c) \langle e, \Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})yz, f_1 \dots f_n \rangle \text{ aus } M_j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung 13.2 ist $\Psi(\frac{y}{d})(\frac{z}{e})yz \text{ aus } C^6$,
 nach 13.1 hat dieser Komplex die Gestalt $[qs \ Q]$. Dann ist
 nach Definition von $[p \ (M_j; j \in J)]$ (c) äquivalent zu

$$(d) \overline{ps(qs)t_1 \dots t_n} = j.$$

Aus $\overline{\text{Spqst}_1 \dots t_n} = \overline{\text{ps}(\text{qs})t_1 \dots t_n}$ folgt die Äquivalenz von (b) und (d), also auch von (a) und (b), und das folgt aus $E_1(\text{Spqst}_1 \dots t_n)(\text{ps}(\text{qs})t_1 \dots t_n) w$.

13.2.7. a sei $(p^{\delta\tau} q^{\delta})$ vom Typ τ :

Die 4 Fälle für τ sind formal analog, wir zeigen als Beispiel den Fall $\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0, n > 0$.

Für 13.2, also $[(\phi_1 p)(\phi_1 q) \phi_2(pq)]$ aus C^τ , ist zu zeigen:

a) bzw. b) Sind $c_i = [t_i M_i] \in C^{\tau_i}$, und gibt es $c'_i = [t'_i M_i]$: $(\phi_1 p)(\phi_1 q)t'_1 \dots t'_n w/f$, so ist $\langle \phi q, c_1 \dots c_n \rangle \in \phi_2 p / \notin \phi_2 p$.

c) Sind $c'_i = [t'_i M_i]$, $c''_i = [t''_i M_i]$ aus C^{τ_i} , so sind äquivalent: $\langle \phi q, c'_1 \dots c'_n \rangle \in \phi_2 p$ und $\langle \phi q, c''_1 \dots c''_n \rangle \in \phi_2 p$.

Zu a) und b) gilt nach Induktionsvoraussetzung $\phi q \in C^{\delta}$ und $\phi p = [\phi_1 p \phi_2 p]$ aus $C^{\delta\tau}$. Man hat also $\phi q = [\phi_1 q \phi_2 q] \in C^{\delta}$ und $c_i = [t_i M_i] \in C^{\tau_i}$, und es gibt $[\phi_1 q \phi_2 q]$, $c'_i = [t'_i M_i]$: $(\phi_1 p)(\phi_1 q)t'_1 \dots t'_n w/f$. Mit 11.1.2.2 folgt die Behauptung.

c) folgt sofort aus 11.3.1.

Für 13.3 ist zu zeigen: Unter der genannten Voraussetzung an ϕ und ψ gilt $\phi_2(pq) = \psi_2(pq)$, also $\langle \phi q, c_1 \dots c_n \rangle$ aus $\phi_2 p$ genau dann, wenn $\langle \psi q, c_1 \dots c_n \rangle$ aus $\psi_2 p$. Da nach Induktionsvoraussetzung $\phi_2 p = \psi_2 p$ gilt, ist zu zeigen:

$\langle \phi q, c_1 \dots c_n \rangle \in \phi_2 p$ genau wenn $\langle \psi q, c_1 \dots c_n \rangle \in \phi_2 p$.

Das folgt mit 11.3.1, da $\phi_2 q = \psi_2 q$ nach Induktionsvor.

§ 14. Weitere Eigenschaften der V-Korrespondenzen

In diesem Paragraphen seien eine Semiwertung V und dazu Korrespondenzen ϕ und ψ gegeben.

14.1. Aufgrund von 13.1 und 13.3 gilt: Ist für jede in p vorkommende Variable x - $\phi_1 x = \psi_1 x$, so ist $\phi_1 p = \psi_1 p$.
- $\phi_2 x = \psi_2 x$, so ist $\phi_2 p = \psi_2 p$.

14.2. Lemma:

Für $i = 1 \dots n$ sei x_i eine Variable und p_i ein Term, beide von demselben Typ. Dann gilt $\phi t' = \phi' t$ für

$$t' := t \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ p_1 \dots p_n \end{smallmatrix} \right) \text{ und } \phi' := \phi \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \phi_{p_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ \phi_{p_n} \end{smallmatrix} \right).$$

(Das wird bewiesen durch triviale Induktion nach 12.5.)

14.3. Lemma:

14.3.1. $\phi_2(p^\tau t_1 \dots t_n) = w$ genau dann, wenn $\langle \phi t_1 \dots \phi t_n \rangle$ aus ϕ_{2p} ist. ($\tau = \tau_1 \dots \tau_n 0$, $n > 0$.)

14.3.2. Für alle $j \in J$ ist $\phi_2(p^\tau t_1 \dots t_n) = j$ genau dann, wenn $\langle \phi t_1 \dots \phi t_n \rangle$ aus ϕ^j_p ist. ($\tau = \tau_1 \dots \tau_n 1$, $n > 0$)

Beweis von 14.3.1 durch Induktion nach n :

- $\phi_2(p^{\tau_0} t_1) = w$ genau dann wenn $\phi t_1 \in \phi_{2p}$ (nach 12.5.7.1).
- Nach Induktionsvoraussetzung sind (a) und (b) äquivalent, nach 12.5.7.3 ist (b) äquivalent zu (c):

$$(a) \phi_2((p^{\tau_{n+1}}(\tau_n \dots \tau_1 0)_{t_{n+1}}) t_n \dots t_1) = w.$$

$$(b) \langle \phi t_n \dots \phi t_1 \rangle \text{ ist aus } \phi_2(p t_{n+1}).$$

$$(c) \langle \phi t_{n+1}, \phi t_n \dots \phi t_1 \rangle \text{ ist aus } \phi_{2p}.$$

Analog wird 14.3.2 mit 12.5.7.2 und 12.5.7.4 gezeigt.

14.4. Hauptlemma:

$$\phi_2(Np) = \begin{cases} w, & \text{wenn } \phi_{2p} = f, \\ f, & \text{wenn } \phi_{2p} = w. \end{cases}$$

$$\phi_2(Apq) = \begin{cases} w, & \text{wenn } \phi_{2p} = w \text{ oder } \phi_{2q} = w, \\ f, & \text{wenn } \phi_{2p} = f \text{ und } \phi_{2q} = f. \end{cases}$$

$$\phi_2(Epq) = w \text{ genau dann, wenn } \phi_{2p} = \phi_{2q}.$$

$$\phi_2(Kpqt_1 \dots t_n) = \phi_2(pt_1 \dots t_n),$$

$$\phi_2(Spqrt_1 \dots t_n) = \phi_2(pr(qr)t_1 \dots t_n),$$

wenn $Kpqt_1 \dots t_n$ und $Spqrt_1 \dots t_n$ vom Typ 0 oder 1 sind.

Wir zeigen nur die letzte von diesen Aussagen, die anderen folgen trivial aus 14.3. S sei vom Typ $(\varrho_6\tau)(\varrho_6)\varrho\tau_1\dots\tau_n0$. Dann sind jeweils (i) und (i+1) äquivalent, was nach der Aussage (i+1) begründet ist:

- (1) $\phi_2(\text{Spqrt}_1\dots\tau_n) = w$.
- (2) $\langle\phi_p, \phi_q, \phi_r, \phi_{t_1}\dots\phi_{t_n}\rangle \in \phi_2S$. (14.3.1)
- (3) $\langle\phi_r, \psi(\phi_q^y)(\phi_r^z)yz, \phi_{t_1}\dots\phi_{t_n}\rangle \in \phi_2P$. (Definition ϕ_2S)
- (4) $\langle\phi_r, \phi(\phi_q^y)(\phi_r^z)yz, \phi_{t_1}\dots\phi_{t_n}\rangle \in \phi_2P$. (14.1)
- (5) $\langle\phi_r, \phi(qr), \phi_{t_1}\dots\phi_{t_n}\rangle \in \phi_2P$. (14.2)
- (6) $\phi_2(\text{pr}(qr)t_1\dots t_n) = w$. (14.3.1)

Analog zeigt man die Äquivalenz von $\phi_2(\text{Spqrt}_1\dots\tau_n) = j$ und $\phi_2(\text{pr}(qr)t_1\dots t_n) = j$ für alle j mit Hilfe von 14.3.2.

14.5. Lemma: (a) $\phi_{2p}^{6\tau} = \phi_{2q}^{6\tau}$,

$$(b) \phi_c^{(x)}(\phi_{2p}^{6\tau}) = \phi_c^{(x)}(\phi_{2q}^{6\tau}) \text{ für alle } c \in C^6$$

sind äquivalent, wenn x weder in p noch in q vorkommt.

Die 4 Fälle für τ verlaufen analog, wir zeigen den Fall $\tau = \tau_1\dots\tau_n1$ ($n > 0$). Dann bedeutet (b):

$$(c) \langle c_1\dots c_n \rangle \in \phi_c^{(x)j} p x \text{ äq } \langle c_1\dots c_n \rangle \in \phi_c^{(x)j} q x \text{ für alle } c^6, \text{ für alle } j \in J \text{ sowie für alle } c_1^{t_1}\dots c_n^{t_n}.$$

(Dabei steht äq als Abkürzung für "ist äquivalent zu".)

Nach Definition bedeutet die Aussage (c):

$$(d) \langle \phi_c^{(x)}x, c_1\dots c_n \rangle \in \phi_c^{(x)j} p \text{ äq } \langle \phi_c^{(x)}x, c_1\dots c_n \rangle \in \phi_c^{(x)j} q \text{ für alle } j \in J \text{ sowie für alle } c, c_1\dots c_n.$$

Da nach 14.1 $\phi_c^{(x)}p = \phi_p$, $\phi_c^{(x)}q = \phi_q$, bedeutet (d):

$$(e) \langle c, c_1\dots c_n \rangle \in \phi_c^{j} p \text{ äq } \langle c, c_1\dots c_n \rangle \in \phi_c^{j} q, \text{ für alle } j \in J \text{ und alle } c, c_1\dots c_n, \text{ und das ist zu (a) äquivalent.}$$

14.6. Lemma:

Ist $\phi_{2p}^{6\tau} = \phi_{2q}^{6\tau}$, so gilt auch $\phi_2(pt^6) = \phi_2(qt^6)$.

(Aus der Voraussetzung folgt mit 14.5 $\phi_c(x)_2 px = \phi_c(x)_2 qx$, wo man ϕ für c wähle. Mit 14.2 folgt die Behauptung.)

14.7. Lemma:

Gilt $\phi_2(x^\tau p_1 \dots p_n) \neq \phi_2(x^\tau q_1 \dots q_n)$ ($\tau = \tau_1 \dots \tau_n$, $n > 0$), so gilt für ein i aus $1 \dots n$: $\phi_2 p_i \neq \phi_2 q_i$.

Für $\gamma = 0$ nehmen wir an, $\phi_2 p_i = \phi_2 q_i$ für alle i . Dann ist $\phi x = [\phi_1 x, \phi_2 x]$ aus C^τ , und man hat $\phi p_i = [\phi_1 p_i, N_1]$ und $\phi q_i = [\phi_1 q_i, N_1]$ aus C^{τ_i} ($i = 1 \dots n$) und es wäre $\langle \phi p_1 \dots \phi p_n \rangle \in \phi_2 x$ genau dann wenn $\langle \phi q_1 \dots \phi q_n \rangle \in \phi_2 x$ wegen 11.3.1. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, denn ist z. B. $\phi_2(x p_1 \dots p_n) = f$ und $\phi_2(x q_1 \dots q_n) = w$, so ist nach 14.3.1 $\langle \phi p_1 \dots \phi p_n \rangle$ nicht aus $\phi_2 x$, $\langle \phi q_1 \dots \phi q_n \rangle \in \phi_2 x$. Analog wendet man für $\gamma = 1$ 11.3.2 und 14.3.2 an.

§ 15. V-Korrespondenzen und Herleitbarkeit

In den beiden folgenden Lemmata sei V eine Semiwertung und ϕ eine V -Korrespondenz.

15.1. Ist $\phi_2 F[p] = f$, so ist auch $\phi_2 p = f$.

15.2. Ist $\phi_2 F[p] = f$ und $\phi_2 F[q] = w$, so ist $\phi_2 q = w$.

(Beide Aussagen werden gezeigt durch Induktion nach der Länge der Positivform $F[z]$.)

15.3. Hauptlemma:

Ist die Formel p herleitbar, so gilt für jede Semiwertung V und jede V -Korrespondenz ϕ : $\phi_2 p = w$.

Der Beweis geschieht durch Induktion nach der Ordnung, mit der p als herleitbar vorausgesetzt wird, u. z. indirekt:

Aus der Annahme, die Behauptung gelte nicht, werden zwei sich widersprechende Folgerungen gezogen. Diese sind bei den einzelnen Beweisschritten unterstrichen.

Wir schreiben: " $t \ w$ " bzw. " $t \ f$ " statt " $\phi_2 t = w$ bzw. f ", " $s = t$ " für " $\phi_2 s = \phi_2 t$ ", " $s \neq t$ " statt " $\phi_2 s \neq \phi_2 t$ ".

Die Fälle, bei denen die Formel p ein Axiom oder zuletzt durch einen Grundsatz A_1 , A_4 , E_a , E_b oder F hergeleitet worden ist, verlaufen im Prinzip genauso wie in formalen Systemen der einfachen Typenlogik ohne Extensionalität. (Bei A_4 , E_a und E_b ist die Aussage $k p_1 \dots p_n = k^R p_1 \dots p_n$ aus 14.4 zu benutzen.) Wir zeigen die übrigen Fälle:

15.3.1. $F[E_0 p q]$, hergeleitet aus $F[\neg p v q]$ und $F[\neg q v p]$:

Aus der Annahme $F[E_0 p q]$ f folgt

- mit 15.1 $E_0 p q \ f$, daraus $p \neq q$,
- da nach Induktionsvoraussetzung (IV) $F[\neg p v q]$ w und $F[\neg q v p]$ w gilt, mit 15.2 $\neg p v q \ w$ und $\neg q v p \ w$.

Aus $\neg q v p \ w$ folgt $\neg q \ w$ oder $p \ w$, daraus $q \ f$ oder $p \ w$.

Aus $\neg p v q \ w$ folgt $\neg p \ w$ oder $q \ w$, daraus $p \ f$ oder $q \ w$. Da $p \neq q$, würde aus $p \ f \ q \ w$ folgen, also ist in jedem Fall $q \ w$. Da $p \neq q$, folgt daraus $p \ f$ und $q \ w$.

15.3.2. $F[E_{6\tau} p q]$, hergeleitet mit A_3 aus $F[E_\tau(p x)(q x)]$, wobei x nicht in $F[E_{6\tau} p q]$ vorkommt.

Aus der Annahme $\phi_2 F[E_{6\tau} p q] = f$ folgt

- mit 15.1 $\phi_2 E_{6\tau} p q = f$, daraus hat man $\phi_2 p^{6\tau} \neq \phi_2 q^{6\tau}$,
- mit 14.1 $\phi(\frac{x}{c})_2 F[E_{6\tau} p q] = f$ für alle c^6 . Da nach IV $\phi(\frac{x}{c})_2 F[E_\tau(p x)(q x)] = w$ für alle c^6 , folgt daraus mit 15.2 $\phi(\frac{x}{c})_2 E_\tau(p x)(q x) = w$ für alle c^6 , also $\phi(\frac{x}{c})_2 p x = \phi(\frac{x}{c})_2 q x$ für alle c , und daraus folgt mit 14.5 $\phi_2 p^{6\tau} = \phi_2 q^{6\tau}$.

15.3.3. $F[\neg E_0 p q]$, hergeleitet aus $C_v(p v q)$ und $C_v(\neg p v \neg q)$:

Aus der Annahme $F[\neg E_0 pq]$ f folgt

- mit 15.1 $\neg E_0 pq$ f, daraus $E_0 pq$ w, also $p = q$,
- da nach IV $Cv(pvq)$ w und $Cv(\neg pv\neg q)$ w gilt, $(\neg pv\neg q)$ w und (pvq) w.

Aus $(\neg pv\neg q)$ w folgt $\neg p$ w oder $\neg q$ w, daraus p f oder q f.

Aus (pvq) w folgt p w oder q w. Da $p = q$, würde aus q w p w folgen. Somit ist in jedem Fall p w, und da $p = q$, folgt p w und q w.

15.3.4. $F[\neg E_{6\tau} pq]$, hergeleitet aus $Cv\neg E_{\tau}(pt^6)(qt^6)$:

Aus der Annahme $F[\neg E_{6\tau} pq]$ f folgt

- mit 15.1 $\neg E_{6\tau} pq$ f, daraus $E_{6\tau} pq$ w, also $p^{6\tau} = q^{6\tau}$, und dann ist wegen 14.6 $pt = qt$ für alle t,
- da nach IV $Cv\neg E_{\tau}(pt)(qt)$ w ist, $\neg E_{\tau}(pt)(qt)$ w, daraus folgt $E_{\tau}(pt)(qt)$ f, also $pt \neq qt$ für dieses t.

15.3.5. $G[xp_1 \dots p_n \neg xq_1 \dots q_n]$, aus $CvEp_i q_i$ ($i = 1 \dots n$):

Aus der Annahme $G[xp_1 \dots p_n \neg xq_1 \dots q_n]$ f folgt

- da nach IV $CvEp_i q_i$ w gilt für alle i, $Ep_i q_i$ w für alle i, daraus folgt $p_i = q_i$ für alle i,
- nach 15.1 $(xp_1 \dots p_n)$ f und $(\neg xq_1 \dots q_n)$ f, daraus $xp_1 \dots p_n$ f und $xq_1 \dots q_n$ w. Mit 14.7 folgt $p_i \neq q_i$ für ein i.

15.3.6. $F[E_1(xp_1 \dots p_n)(xq_1 \dots q_n)]$, aus $CvEp_i q_i$ ($i = 1 \dots n$) wird mit 14.7 analog zu 15.3.5 gezeigt.

15.3.7. $G[E_1 p'q' \neg E_1 p''q'']$, aus $CvE_1 p'p''$ und $CvE_1 q'q''$:

Aus der Annahme $G[E_1 p'q' \neg E_1 p''q'']$ f folgt

- mit 15.1 $E_1 p'q'$ f und $\neg E_1 p''q''$ f,
- da nach IV $CvE_1 p'p''$ w und $CvE_1 q'q''$ w, $E_1 p'p''$ w, $E_1 q'q''$ w.

Aus $\neg E_1 p''q''$ f folgt $E_1 p''q''$ w, daraus $p'' = q''$. Aus $E_1 p'p''$ w folgt $p' = p''$, aus $E_1 q'q''$ w $q' = q''$, aus $E_1 p'q'$ f: $p' \neq q'$.

Aus $q' = q''$, $p'' = q''$ folgt $p'' = q'$, daraus hat man mit $p' = p''$: $p' = q'$.

15.3.8. p sei hergeleitet aus $p \vee \mathcal{A}$:

Aus der Annahme $\phi_2 p = f$ folgt, da nach IV $\phi_2(p \vee \mathcal{A}) = w$:

$\phi_2 \mathcal{A} = \phi_2 N(E_{00}(K_{00} \gamma)(S_{000} \mathcal{A}N)) = w$. Daraus folgt:

$\phi_2 K_{00} \gamma \neq \phi_2 S_{000} \mathcal{A}N$.

Wegen 14.5 gibt es ein c^0 : $\phi_c^{(x)} \phi_2 K \gamma x \neq \phi_c^{(x)} \phi_2 S \mathcal{A}N x$.

Da $\phi_c^{(x)} \phi_2 K \gamma x = \phi_c^{(x)} \phi_2 \gamma = \phi_c^{(x)} \phi_2 E_{00} I_0 I_0 = w$, folgt:

$\phi_c^{(x)} \phi_2 S \mathcal{A}N x = f$, damit auch $\phi_c^{(x)} \phi_2 \mathcal{A}x(Nx) = f$.

Daraus folgt: $\phi_c^{(x)} \phi_2 x = f$ und $\phi_c^{(x)} \phi_2 x = w$.

§ 16. Die Elimination der Schnittregel

16.1. Hauptlemma:

Gibt es eine Semiwertung, in der die Formel p den Wert f hat, so ist p nicht herleitbar.

(Zu der vorausgesetzten Semiwertung wähle man eine Korrespondenz ϕ , die jeder Variablen x^T ein Element der Gestalt $[x^T N]$ von C^T zuordnet. Dann ist $\phi_1 p = p$. Da $\phi p = [p \ \phi_2 p]$ aus C^0 gilt und p den Wert f hat, muß gelten $\phi_2 p = f$. Dann kann p nach 15.3 nicht herleitbar sein.)

16.2. Hauptsatz:

Jede herleitbare Formel ist streng herleitbar.

(Denn ist eine Formel nicht streng herleitbar, so ist sie wegen 9.2 und 16.1 auch nicht herleitbar.)

Literatur

L. Henkin:

- [1] A theory of propositional types,
Fund. Math. 52 (1963), 323 - 344

D. Prawitz:

- [2] Hauptsatz for higher order logic,
J. Symb. Logic 33 (1968), 452 - 457

V. Reiß:

- [3] Schnitteliminierbarkeit in der einfachen Typenlogik
mit Extensionalität,
Diplomarbeit an der Universität München 1969

K. Schütte:

- [4] On simple type theory with extensionality,
North-Holland Publ. Co, Amsterdam 1968
- [5] Syntactical and semantical properties of simple
type theory, J. Symb. Logic 25 (1960), 305 - 326
- [6] Theorie der Funktionale endlicher Typen,
Teilskriptum zu einer Vorlesung über rekursive
Funktionen im Wintersemester 1968/69 an der
Universität München

M. Takahashi:

- [7] A proof of cut-elimination theorem in simple type
theory, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 399 - 410
- [8] Simple type theory of Gentzen style with the
inference of extensionality, unveröffentlicht

G. Takeuti:

- [9] On a generalized logic calculus,
Jap. J. Math. 23 (1953), 39 - 96

Lebenslauf:

Ich, Karl Schlögl, wurde am 21. 2. 1947 in München geboren, als Sohn des Diplomlandwirts Karl Schlögl und seiner Frau Luise, geborene Hasel.

Nach vier Jahren Volksschule trat ich im Herbst 1957 in die Oberrealschule Rosenheim (das heutige Finsterwalder-Gymnasium) ein und legte dort am 18. 7. 1966 das Abitur ab.

Vom Wintersemester 1966/67 bis einschließlich Sommersemester 1970 studierte ich an der Universität München Mathematik und legte am 14. 9. 1970 die Diplomprüfung ab.

Seitdem war ich mit dem (im Wintersemester 1969/70 begonnenen) Studium der Rechte und der Abfassung der vorliegenden Arbeit beschäftigt.

